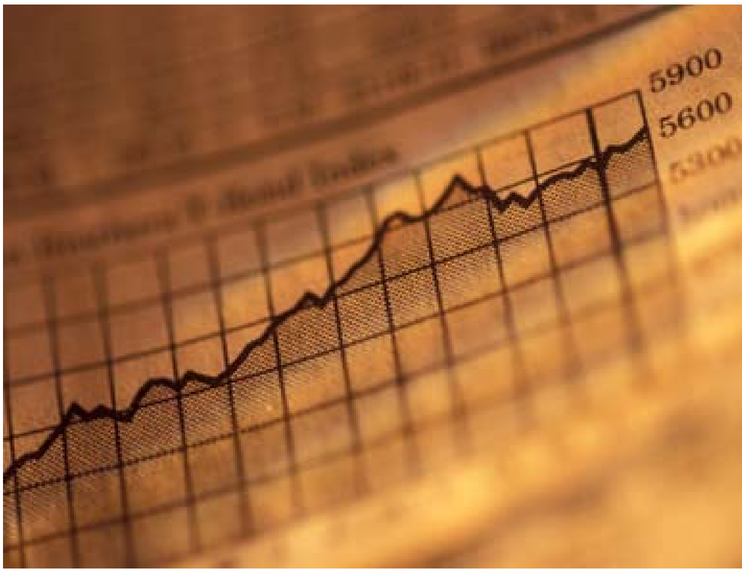
Programmation
linéaire

Par David K. J. **MTETWA**



African Virtual university
Université Virtuelle Africaine
Universidade Virtual Africana

NOTE

TABLE DES MATIÈRES

I. La programmation linéaire

Présenté par David K.J. Mtetwa

II. Conditions et connaissances préalables

Pour pouvoir s'inscrire à ce cours, l'étudiant doit au préalable avoir suivi les cours suivants : Mathématiques élémentaires et Algèbre linéaire qui sont aussi offerts dans ce programme. Une connaissance de l'indépendance linéaire, des bases, des opérations matricielles, des inverses, des inégalités, des espaces vectoriels, des ensembles convexes et du dessin graphique est essentielle. Ces concepts et ces compétences sont généralement couverts par les cours obligatoires (ou des équivalents) mentionnés ici. Une compréhension de base de ces concepts, des concepts liés et une compétence raisonnable des manipulations matricielles et algébriques et des représentations graphiques doivent faire partie des acquis de l'étudiant pour ce module. Avant de commencer ce module, l'étudiant doit s'être familiarisé avec ces concepts et compétences de base.

III. Durée du cours

La durée du cours est d'au moins 120 heures d'étude. La section 1 représente 40 heures (20 heures pour chacune des activités), la section 2 représente 80 heures (20 heures pour la première activité, 34 heures pour la deuxième et 20 heures pour la troisième). Le reliquat de 6 heures est alloué aux activités d'évaluation anticipée (2 heures) et d'évaluation cumulative (4 heures).

IV. Supports pédagogiques

Les étudiants devront avoir accès à un ordinateur afin d'obtenir les lectures essentielles spécifiées un peu plus loin. Les étudiants devront aussi être en mesure d'installer les logiciels wxMaxima et Graph et de les utiliser pour mettre en pratique les concepts d'algèbre spécifiques à ce cours. Ces logiciels doivent être perçus comme étant des outils pédagogiques et d'apprentissage qui facilitent la compréhension des notions essentielles du module. Les supports pédagogiques suivants sont nécessaires pour entreprendre ce module de manière à tirer pleinement profit de l'enseignement et permettre, nous l'espérons, la réussite de ce cours : la version étudiant du module (format imprimé), un ordinateur avec un accès Internet et Microsoft Office 2003 ou plus, une calculatrice scientifique programmable, du matériel de dessin graphique, des CD contenant des fichiers téléchargés des sites recommandés, des CD contenant des logiciels mathématiques tels que MathType ou WinShell, Graph, wxMaxima, et, au moins un logiciel de programmation linéaire qui est téléchargeable et finalement, des lectures recommandées provenant de textes identifiés plus loin. Les lectures recommandées peuvent aussi être disponibles en format papier.

V. Justification

L'étude de la programmation linéaire revêt toute son importance en raison de ses multiples applications, ainsi que de son apport à générer des techniques permettant de trouver des solutions optimales. La programmation linéaire est utile dans le processus de prise de décision notamment dans les décisions d'ordre quantitatif du monde des affaires, dans les entreprises d'ingénierie industrielle et, d'une façon moins importante, dans certaines activités des sciences de la vie et des sciences sociales. Les compétences acquises en programmation linéaire pourraient même être utiles pour les enseignants dans la gestion de certains aspects de leur vie personnelle et professionnelle.

Ce module se veut une entrée en matière conviviale dans le monde des mathématiques de la programmation linéaire dynamique, des réseaux et de la recherche opérationnelle. L'étudiant pourrait même être amené à poursuivre des études plus avancées dans ces domaines. En outre, ce module :

(a) est important en tant que tel, puisqu'il s'agit d'un cours de mathématiques de niveau universitaire et qu'il introduit un nouveau contenu et un style de raisonnement mathématique particulier.

(b) intègre de façon très intéressante les concepts théoriques et leurs applications pratiques – de nature mathématique ou de la vie quotidienne.

(c) est nécessaire pour le futur enseignant de sciences ou de mathématiques puisqu'il sera exposé à une jeune population étudiante ayant des intérêts de carrière très variés. Pour certaines de ces carrières, l'étudiant aurait avantage à se familiariser par une préparation adéquate concernant la programmation linéaire et l'optimisation.

VI. Contenu

6.1 Aperçu — Description

Ce module sert d'introduction à une approche mathématique particulière pour analyser les activités de la vie courante et met l'accent sur la prise de décision dans des situations bien délimitées. Cette approche, nommée programmation linéaire, est ici présentée particulièrement sous l'angle de la manière de réfléchir et d'interpréter des énoncés mathématiques, plutôt que sur une compétence informatique en soi, qui elle, est laissée aux programmes en TIC, facilement accessibles.

Ce module débute par la Section 1 qui inclut deux activités principales. La première, Formulation d'un problème de programmation linéaire, est une description mathématique d'une situation problème et la deuxième activité, l'approche géométrique, porte sur une description visuelle d'une solution réalisable à une situation problème. En résumé, la Section 1 devrait amener l'étudiant vers une connaissance sommaire des situations de la vie quotidienne qui peuvent être modélisées en tant que problèmes de programmation linéaire.

La Section 2 comprend trois activités principales qui traitent d'algorithmes informatiques servant à trouver une solution possible optimale à des problèmes de programmation linéaire du même type que ceux formulés à la Section 1. L'activité 3 étudie les conditions nécessaires à l'optimalité d'une solution, qui est en soi de reconnaître qu'une solution s'approche et arrive à la meilleure solution potentielle. L'activité 4 présente la pièce de résistance des méthodes de calculs algébriques, le fameux algorithme du simplexe. Ce module s'attaque principalement à la logique de l'algorithme et des propriétés qualitatives associées : la dualité, la dégénérescence et l'efficience. La dernière activité porte sur le problème de la stabilité des solutions optimales obtenues relativement aux variations des intrants ou extrants spécifiques dans les contraintes et les fonctions économiques. L'analyse de sensibilité et d'optimalité à posteriori est présentée ici dans le seul but de permettre une compréhension de base des stratégies analytiques utilisées.

Déroulement de l'apprentissage

Section 1

Décrire, définir, comprendre et identifier une situation problème de programmation linéaire générale ainsi que les solutions possibles.

Section 2

Les stratégies informatiques servant à chercher des solutions à des problèmes de programmation linéaire, reconnaître des solutions possibles, les solutions optimales et les considérations d'efficience.

6.2 Sommaire du contenu du module

Section 1 : Problème de programmation linéaire

- Formulation d'un problème de programmation linéaire
  1. La forme générale d'un problème de programmation linéaire.
  2. Le problème de programmation linéaire standard
- L'interprétation géométrique d'une solution à un problème de programmation linéaire
  1. Deux dimensions
  2. Plus de deux dimensions

Section 2: Les algorithmes informatiques

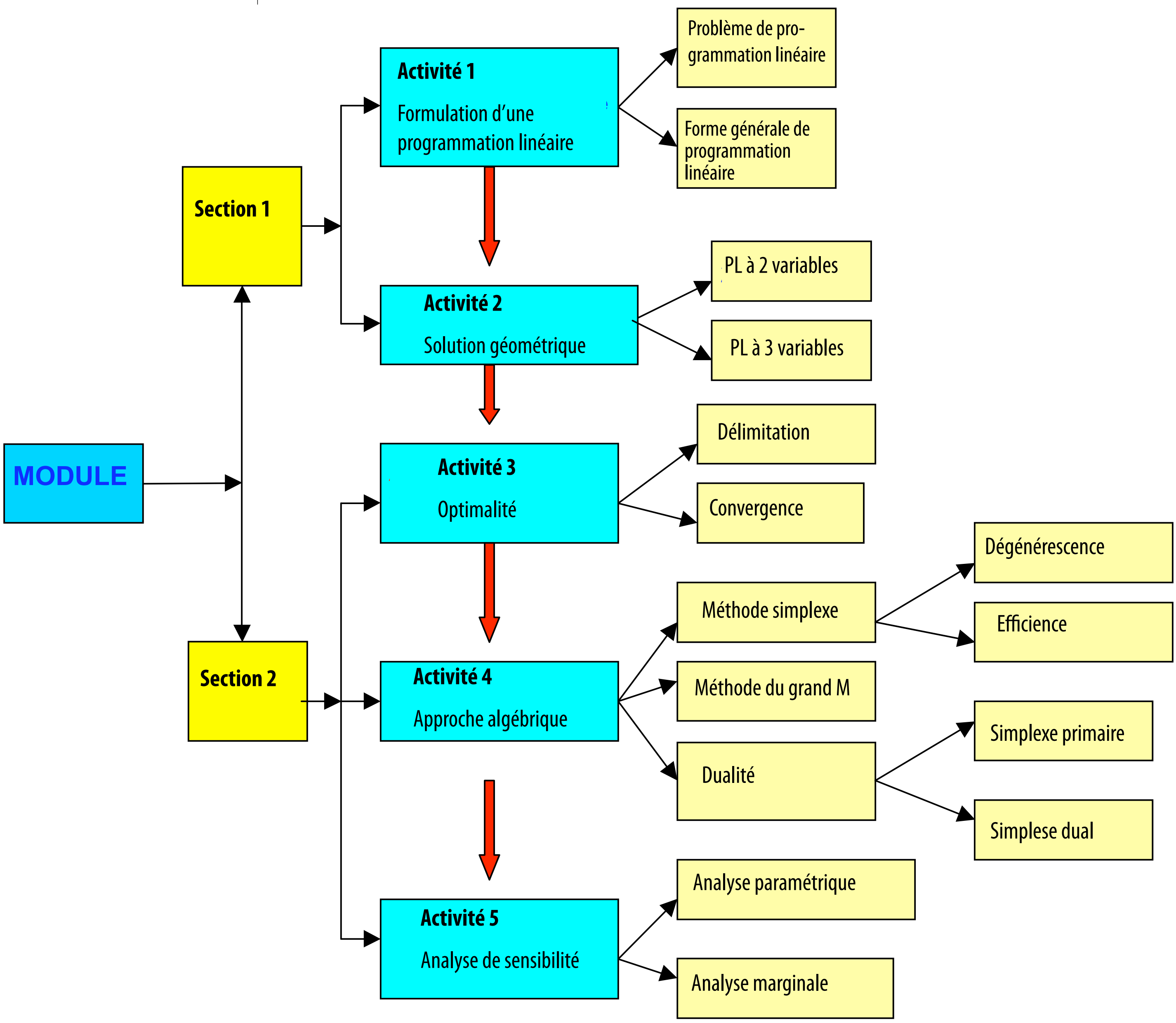
Recherche et reconnaissance d'une solution potentielle : conditions d'optimalité pour une fonction économique à un problème de programmation linéaire

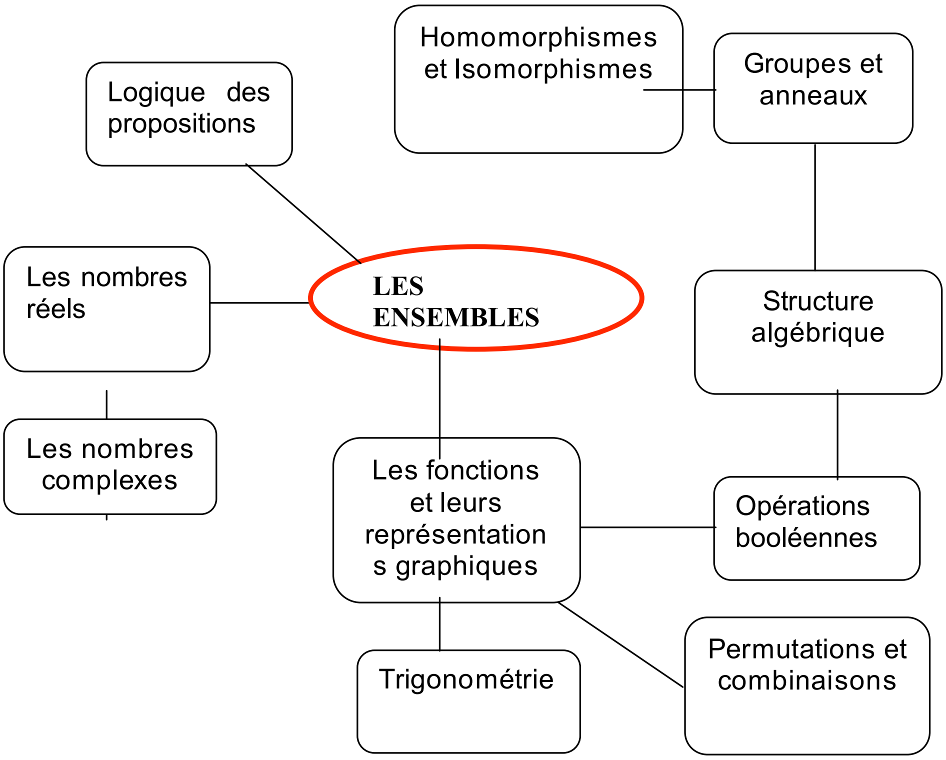
1. Délimitation
2. Convergence

- Interprétation algébrique de la solution à un problème de programmation linéaire

1. Méthode du Grand M
2. Algorithme du simplexe
3. Dégénérescence
4. Efficience
5. Notion de dualité
6. Simplexe primaire
7. Simplexe dual

6.3 Représentation graphique du module





VII. Objectifs généraux

À la fin de ce module

- vous serez en mesure de :

a) Comprendre les différents types de problèmes susceptibles d'être analysés par la programmation linéaire.
b) Formuler des problèmes de programmation linéaire et de les résoudre en utilisant les techniques de géométrie et d'algèbre linéaire.
c) Utiliser les logiciels mathématiques afin de résoudre des problèmes de programmation linéaire.
d) Discuter des notions théoriques de l'algèbre linéaire et géométrique par rapport à des contextes pratiques et concrets.
e) vous familiariser avec le langage de la recherche opérationnelle.
f) de développer une manière de penser en termes d'algorithmes.

VIII. Objectifs spécifiques d'apprentissage (Objectifs éducationnels)

À la fin du module, l'étudiant devra être capable de :

1. Identifier et modéliser les problèmes liés à la programmation linéaire.
2. Mettre en application les connaissances d'inégalités afin de résoudre les problèmes d'optimisation.

D'acquérir des connaissances didactiques dans le domaine des :

1. Fonctions linéaires et les équations simultanées.

Mettre à profit vos connaissances dans le domaine de l'ITC par :

1. L'utilisation de logiciel pour le dessin graphique pour étudier les fonctions linéaires.
2. L'utilisation du logiciel CAS « Computer Algebra Systems » pour résoudre les problèmes des systèmes linéaires.

Section	Objectifs d'apprentissage
Formulation de problème	**L'étudiant devrait être en mesure de :** Identifier et de reconnaître une situation d'optimisation dans une activité de prise de décision tirée d'une situation de la vie courante. Produire un modèle mathématique formulé dans un langage approprié. Décrire, expliquer et appliquer les conditions d'optimalité pour des problèmes de programmation linéaire donnés. Décrire la logique sous-jacente à l'algorithme simplexe. Faire le lien entre la solution algébrique et la solution géométrique. Exécuter un algorithme du simplexe pour des situations problèmes spécifiques avec un logiciel de programmation linéaire et de savoir interpréter la solution qui en résulte. Expliquer ce qu'est la dualité et décrire son rôle dans la recherche de solutions de problèmes de programmation linéaire. Expliquer les buts d'une analyse de sensibilité pour une solution donnée à un problème de programmation linéaire. Décrire un processus pour faire une analyse de sensibilité pour une solution optimale donnée.

IX. Activités d'enseignement et d'apprentissage

Évaluation anticipée – Test sur les concepts algébriques de base

But — Vérifier si l'étudiant connaît certains concepts utilisés dans ce module.

Questions

1. Laquelle de ces équations est linéaire?

   (a) $ax^2+by = c$ (b) $ax - by = c$ (c) $ax + by^2 = c$ (d) $a\cos x + by = c$

2. Lequel de ces énoncés **n'indique pas de façon générale** un vecteur?

   (a) -5 (b) (1, 2, 3) (c) $\underline{\mathbf{A}}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$

3. La matrice $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est :

   (a) 3 5 (b) 2 5 (c) 5 3 (d) 5×2

4. Une matrice singulière en est une qui :

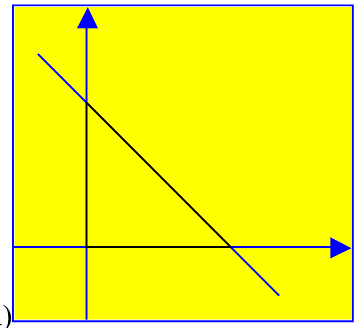
   (a) est simple (b) peut être inversible (c) ne peut être inversible
   (d) a un déterminant de1

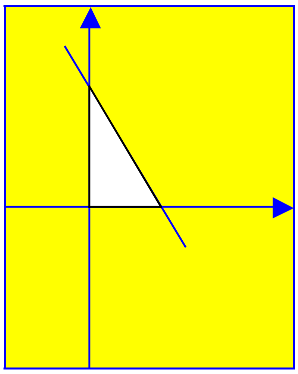
5. La matrice $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ a un rang:

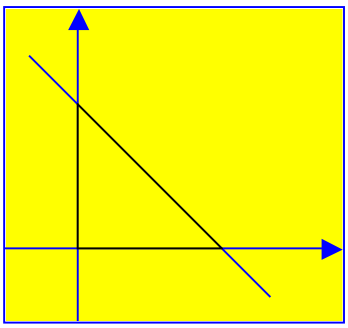
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

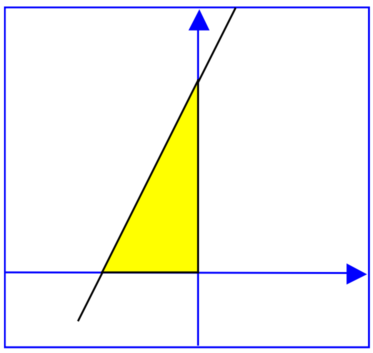
6. Selon l'équation linéaire $x + y \leq 1$, lequel de ces graphes satisfait cette inégalité?

N.B. La section recherchée est en jaune.

A) 

B) 

C) 

D) 

7. Si $ax + by \leq c$ pour les nombres a, b, c alors $ax + by + d = c$ pour un nombre positif d.

   (a) VRAI (b) FAUX

8. Lequel de ces énoncés n'est **pas** directement associé à la méthode d'élimination de Gauss ?

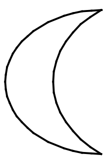
   (a) Réduire une matrice n X n à une forme échelonnée
   (b) Déterminer la convergence d'un ensemble
   (c) Trouver la matrice triangulaire supérieure ou inférieure
   (d) Utiliser des opérations élémentaires pour réduire un ensemble organisé d'équations.

9. Quelle est la matrice transposée de **A**?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

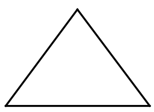
$$(a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}(b)\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}(c)\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}(d)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Laquelle de ces figures montre un ensemble convexe?

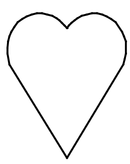


(a)

(b)



(c)



(d)

N.B. Un objet est convexe si pour chacune des paires de points de l'objet, chaque point du segment qui relie les objets fait aussi partie de l'objet.

11. La suite $\{1/n\}$ est limitée au bas par :

    (a) 1 (b) ½ (c) 0 où n est très grand

12. À la valeur optimale d'une fonction :

    (a) la fonction atteint la valeur maximale locale seulement.
    (b) la fonction atteint la valeur minimale locale seulement.
    (c) la fonction atteint une valeur minimale ou maximale.
    (d) Aucun de ces énoncés n'est vrai.

13. L'énoncé suivant représente une fonction discontinue :

    (a) $y = |x|$ (b) $y = 1/x$ (c) $y = 3$ (d) $y = e^{-x}$

14. Une base d'espace vectoriel :

    (a) a des vecteurs linéaires dépendants.
    (b) est un ensemble de vecteurs à une unité seulement.
    (c) a des vecteurs de base qui couvrent entièrement l'espace vectoriel.
    (d) peut inclure le vecteur 0.

15. Laquelle de ces suites n'est pas convergente?

    (a) $\{(\sin(n))/n\}$ (b) $\{\ln(n)\}$ (c) $\{1/n\}$ (d) $\{(n+1)/n\}$

16. Une fonction est dite limitée si :

    (a) elle est définie dans un intervalle ouvert.
    (b) elle a des limites supérieure et inférieure seulement.
    (c) elle a une limite supérieure seulement.
    (d) elle a une limite inférieure seulement.

17. Le déterminant de la matrice suivante $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ est:

    (a) 11 (b) 24 (c) 21 (d) 18

18. Maximiser la génération de profits peut être équivalent à minimiser les coûts de production.

    (a) VRAI (b) FAUX

19. Un vecteur a:

    (a) une magnitude seulement
    (b) une direction seulement.
    (c) une magnitude et une direction seulement.
    (d) une magnitude, une direction et un champ seulement.

20. Un sous-espace d'un espace vectoriel :

    (a) est aussi un espace vectoriel
    (b) n'est pas un espace vectoriel.
    (c) n'est pas un espace linéaire.
    (d) est un demi-espace vectoriel

Solutions

1. b (a et c sont des fonctions paraboliques, d a une fonction périodique cosx)
2. a (a a une magnitude, mais pas de direction, c est généralement une matrice ou un vecteur, b et d sont des vecteurs)
3. a (la matrice a 3 rangées et 5 colonnes et est donc une matrice de 3 par 5)
4. c (une matrice singulière est une matrice avec un déterminant 0 et elle est donc non inversible)
5. d (le rang d'une matrice est le nombre de rangées non nulles et ici elles sont au nombre de 3).
6. a (le graphe d montre $x - y \leq 1$, b a une région ombrée erronée et pour c le plan x-y est entièrement ombré).
7. a (pour que l'égalité puisse être maintenue, on doit ajouter des nombres positifs du côté gauche de l'équation).
8. c (vous utilisez la première entrée de chaque rangée pour éliminer les coefficients non nuls sous elle, créant ainsi une matrice triangulaire supérieure).
9. b (pour transposer, la première colonne devient la première rangée, la seconde colonne, la deuxième rangée, la troisième colonne, la troisième rangée, ce qui donne b).
10. c (c est la seule forme qui permet que deux points de l'ensemble puissent toujours être unis par un segment dont tous les points sont compris dans l'ensemble).

11. c (la suite est une suite décroissante qui s'approche de 0).
12 c (le point optimal est le point maximal ou minimal)
13. b (pour b est continue partout sauf à 0 donc, elle est discontinue).
14. c (pour qu'un vecteur soit appelé une base, il faut qu'il soit indépendant linéairement et qu'il s'étende ou génère l'espace vectoriel en entier).
15. b (a et c convergent vers 0, d converge vers 1).
16. b (une fonction est limitée si elle a une la limite supérieure et une limite inférieure).
17 b (multipliez les termes de la diagonale) .
18. a (si vous diminuez les coûts de production, vous maximiserez les profits).
19. c (une grandeur vectorielle possède une grandeur et une direction c'est-à-dire une vélocité, une accélération).
20. a (un sous-espace d'un espace vectoriel est aussi un espace vectoriel et linéaire puisqu'il satisfait les trois propriétés principales d'un espace vectoriel).

Commentaire pédagogique pour l'étudiant

Si vous avez obtenu moins de 50 % dans cette évaluation anticipée, cela pourrait indiquer que vous avez oublié certaines notions d'algèbre linéaire. Elles peuvent inclure de simples définitions, des propriétés ou des processus informatiques pour des objets (matrices, vecteurs, ensembles, systèmes d'équations linéaires et nombres réels). Le cas échéant, vous êtes fortement encouragés à revoir le module sur les mathématiques élémentaires et l'algèbre linéaire avant d'entreprendre ce module. Si vous avez obtenu plus de 50 %, vous êtes tout de même encouragés à revoir ce même module au besoin alors que vous avancez dans celui-ci. Nous tenons pour acquis que ces notions de base sont bien intégrées, car elles jouent un rôle, sous une forme ou une autre, tout au long de ce module.

X. Activités d'apprentissage

Remarque : Tous les concepts-clés sont définis au glossaire que vous trouverez à la section XI ci-dessous. Lorsque vous rencontrez une définition dans une des activités d'apprentissage, une référence est indiquée qui vous renvoie au glossaire. Les activités d'apprentissage se concentrent sur le développement du concept lui-même ou sur son application. Ceci limite les répétitions inutiles.

Section 1 – La formulation des problèmes

Activité d'apprentissage 1
Formulation d'un problème de programmation linéaire

Objectifs d'apprentissage spécifiques

L'étudiant devrait être en mesure de :

- Identifier et reconnaître une situation d'optimalité;
- Produire un modèle mathématique à l'aide d'un langage mathématique approprié;
- Faire la distinction et établir les relations entre les formes standard et générale;
- Représenter le modèle mathématique géométriquement;
- Identifier les régions de faisabilité, les sommets et les convexes;
- Comprendre les concepts associés aux systèmes d'équations linéaires, les contraintes, la solution possible et la région de faisabilité.
- Interpréter un problème de la vie courante et de le poser en problème de programmation linéaire;
- Vérifier et démontrer une solution possible;
- Exprimer de façon graphique un système d'équations linéaires, c'est-à-dire comprendre la géométrie du modèle de programmation linéaire;
- Résoudre un problème de programmation linéaire par l'approche géométrique.

Sommaire de l'activité d'apprentissage

La programmation linéaire provient de l'étude des inégalités linéaires. Dans cette section, nous offrons une introduction à la programmation linéaire en amorçant avec un simple problème de la vie courante que l'étudiant peut facilement comprendre. L'objectif de la programmation linéaire est de maximiser ou de minimiser certaines fonctions linéaires de quantité appelées les variables décisionnelles. Ces opérations peuvent être effectuées de façon algébrique ou géométrique. Cependant, nous abordons ici seulement la méthode géométrique de résolution d'un problème de programmation linéaire. À l'aide d'exemples spécifiques, vous serez en mesure de comprendre comment certains problèmes peuvent être formulés (par exemple, en administration des affaires, en physique, en chimie, en biologie, en ingénierie, en architecture, en économie, en agriculture et en gestion). Différentes activités seront nécessaires à l'apprentissage dont des lectures sur la programmation linéaire, l'optimalité, la recherche opérationnelle et la nature des fonctions économiques et les contraintes. De plus, les activités d'apprentissage nécessitent un usage intensif des logiciels de mathématiques, afin de résoudre des problèmes de programmation linéaire.

Termes-clés (voir le Glossaire)

Programmation linéaire
Formulation d'un problème
Fonction économique
Solution optimale
Contraintes
Solution possible
Solution de base
Base
Variables de base
Dictionnaire
Variables qui ne sont pas de base
Variable d'écart
Variable de surplus
Variable artificielle
Solution non limitée

Lectures obligatoires

- Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei
  www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf
  (site visité le 15-02-07)
- Lecture notes on Optimization par Pravin Varaiya
  http://robotics.eecs.berkeley.edu/~varaiya/papers_ps.dir/NOO.pdf
  (site visité le 10-02-07)
- A gentle approach to linear programming: Chapitres 1-7
  http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po/Chapter1.pdf
  (site visité le 08-03-07)

Liens utiles

- Linear Programming Formulation
  http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpmore.html
  (site visité le 15-02-07)
- Linear Programming Formulation
  http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/partVIII.htm
  (site visité le 15-02-07)
- An Introduction to Linear Programming and the Simplex Algorithm par Spyros Reveliotis
  http://www2.isye.gatech.edu/~spyros/linear programming/linear programming.html
  (site visité le 14-02-07)
- OR-Notes J E Beasley
  http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/twomines
  (site visité le 16-02-07)
- Linear Programming
  http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/rpcotdp#rpcotdp
  (site visité le 21-02-07)
- Linear Programming Formulation
  www.people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/lp.html
  (site visité le 15-02-07)

Description détaillée de l'activité

- Au cours de cette activité, l'étudiant sera amené à lire les notes disponibles dans le manuel recommandé de manière à obtenir une compréhension générale de ce qu'est un énoncé de problème de programmation linéaire.
- L'étudiant sera aussi amené à discuter en groupe d'une situation qui peut être interprétée comme étant un problème de programmation linéaire, ainsi que de la manière dont ce problème peut être formulé. Durant l'activité, une personne décrit une situation de maximisation ou de minimisation et permet à quelqu'un d'autre d'en faire la formulation mathématique.
- L'étudiant devra aussi tenter de faire l'exercice proposé. L'étudiant trouvera cet exercice dans les pages du manuel de référence.
- L'étudiant devra ouvrir les liens utiles suggérés afin d'approfondir sa compréhension des procédés de formulation des problèmes de programmation linéaire.

Activités d'apprentissage

Problème : un gestionnaire s'interroge sur la façon de maximiser la production.

Supposons que nous avons affaires à un agriculteur commercial qui produit une variété de produits sur une base trimestrielle incluant du maïs, du bœuf, des fèves, etc. Cet agriculteur ne peut produire qu'un certain nombre de produits pour différentes raisons. Les limitations principales sont la taille de sa ferme, le nombre de matières premières nécessaires, le marché, les conditions climatiques, etc. En dépit de ces contraintes, l'agriculteur espère gagner un profit après la vente de ces produits. Il s'agit d'un exemple typique d'un problème de programmation linéaire. Avant de définir ce que nous entendons en général par un problème de programmation linéaire, prenons en considération quelques problèmes pratiques de tous les jours, afin de définir et d'amener ce sujet.

Lecture

Veuillez lire la section suivante du manuel :

- Linear Programming : Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei, Pages 3 à 10 (Managing a production facility)

Veuillez aussi lire le texte sur le site suivant :

- The Standard Form of the Linear Programming Problem http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_programming (site visité le 11-02-07)

Remarques

Afin de vous aider à mieux saisir les notations employées dans ces lectures :

n le nombre de produits différents fabriqués par la compagnie.

m le nombre de matières premières différentes

bi le nombre représentant la quantité de la *i*ème matière première, pour *i*= 1, 2, …, m

ρ_i le prix de l 'unité pour la *i*éme matière première, pour *i*=1, 2,…m à un moment donné.

a_{ij} le nombre représentant la quantité de la *i*ème matière première requise pour produire une unité de jème produits, pour j=1,2,….,n

σ_j le prix sur le marché pour jème produit, pour j=1,2,….,n

x_j le nombre représentant la quantité du jème produit, effectivement fabriqués

$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ le coût de production pour un jème produit,

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i a_{ij} = \rho_1 a_{1j} + \rho_2 a_{2j} + \ldots + \rho_m a_{mj}$$

c_j le profit net pour un jème produit.

$$c_j = \sigma_j - \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$$

$c_j x_j$, le profit net total pour x_j unités du produit j.

Exercice en équipe

En équipe de deux, trouvez une situation où la programmation linéaire entre en compte puis énoncez ce problème sous forme de problème de programmation linéaire.

Représentation générale d'un problème de programmation linéaire

On représente généralement un problème de programmation linéaire de la façon suivante :

Fonction économique :

Maximiser/Minimiser

$$f(x_1, x_2, \ldots., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + .. + c_n x_n$$

Où:

x est la variable décisionnelle

n est le nombre de variables décisionnelles dans une fonction économique

c_j est le coût par unité ou le profit par unité de la j^{ème} variable décisionnelle

De sorte que :

Les contraintes technologiques :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b$$

$$\text{for } i = 1, 2, \cdots, m$$

Et où

$$a_{i1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, a_{i2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, a_{in} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Restriction par rapport au signe

$x_j \geq 0$

Lecture supplémentaire

Lire sur le site :

- An Introduction to Linear Programming and the Simplex Algorithm par Spyros Reveliotis
  http://www2.isye.gatech.edu/~spyros/linear programming/linear programming.html

La formulation d'un problème de programmation linéaire, étape par étape

Question : Qu'est-ce qu'un énoncé de problème de programmation linéaire?

Réponse : L'énoncé d'un problème ou sa modélisation est un procédé qui permet de traduire un énoncé verbal en un énoncé mathématique.

Exemple d'un problème de programmation linéaire [adapté de Koshy (1979)]

Une agricultrice cultive des tomates et des pois sur une terre de 125 hectares. Il faut dépenser 20 000 $ pour faire pousser des tomates sur un hectare, 10 000 $ pour y faire pousser des pois. Cependant, Agri Banque lui a consenti un prêt de seulement 1 500 000 $. Il faut 19 heures de travail pour cultiver un hectare de tomates et 6 heures de travail pour un hectare de pois. Elle désire consacrer 1 080 heures de travail pour exécuter le travail en entier. Si les profits provenant d'un hectare de tomates et d'un hectare de pois sont respectivement de 40 000 $ et 25 000 $, combien d'hectares de chaque culture doit-elle planifier pour maximiser le profit total? Quel est le profit maximal réalisable?

Démarche

Question : Quel est le problème de l'agricultrice?

Réponse : Le problème réside dans le fait qu'elle désire maximiser sont profit tout en ayant des contraintes (la taille de la ferme, les coûts de production et le nombre d'heures de travail).

Question : Quelles sont les contraintes?

Réponse :

i) Si x_1 et x_2 be sont les variables décisionnelles sur le nombre d'hectares pour les tomates et les fèves respectivement

Alors, $x_1 + x_2 \leq 125$ contrainte du nombre d'hectares.

ii) Ces dépenses totales de production sont $20000x_1 + 10000x_2 \leq 1500\,000$

Ou $2x_1 + x_2 \leq 150$ contrainte de dépenses

iii) Le nombre total d'heures de travail $18x_1 + 6x_2 \leq 1080$

Ou $3x_1 + x_2 \leq 180$ contrainte des heures de travail

iv) $x_1 \geq 0$, et $x_2 \geq 0$ contrainte de non-négativité

En conséquence, le problème est de maximiser la fonction de profit

$$f(x_1, x_2) = 40000x_1 + 25x_2 \qquad (1)$$

Sujette aux contraintes

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 125 \\ 2x_2 + x_2 \le 150 \\ 3x_1 + x_2 \le 180 \\ \text{and} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Lignes directrices pour la formulation d'un problème de programmation linéaire

a) Comprendre à fond le problème.
b) Décrire l'objectif.
c) Décrire chaque contrainte.
d) Définir les variables décisionnelles.
e) Écrire l'objectif en fonction des variables décisionnelles.
f) Écrire les contraintes en fonction des variables décisionnelles.

Exercice 1

1. Énoncez à l'aide d'un modèle mathématique les problèmes rencontrés par le gérant de production et le contrôleur.
2. Donnez des exemples tirés de quatre autres champs d'activité où l'optimisation joue un rôle charnière.
3. Donnez les trois conditions nécessaires pour qu'un problème de programmation linéaire soit linéaire.
4. Allez à la page 8 du manuel Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei et répondez aux questions 1.1 et 1.2

Le problème standard de programmation linéaire

Lectures

Veuillez lire la page 6 du manuel de référence Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei.

Suivez ce lien pour une définition détaillée :

http://www.it.uu.se/edu/course/homepage/opt1/ht06/Lectures/fundamentat_thm-2up.pdf

Exercice en groupe

Formez une équipe pour discuter de ces lectures.

Est-ce que vous saisissez bien ce que veut dire la formulation d'un problème de programmation linéaire? Sinon, veuillez consulter votre professeur ou des collègues de classe qui ont bien compris le concept.

Remarque

Voici un résumé concernant la formulation d'un problème de programmation linéaire à prendre en considération :

- Toujours lire le problème en entier.
- Identifier et définir les inconnues (variables et constantes).
- Exprimer par des variables la fonction décisionnelle.

Solutions de l'exercice 1

Question 1

Veuillez consulter Managing a Production Facility, de la page 3 à 5, du manuel Linear Programming : Foundations and Extensions.

Question 2

Voici quelques-unes des principales applications de la programmation linéaire :

La fluidification et les mélanges
Planification de la production
Gestion des raffineries de pétrole
Distribution
Planification financière et économique
Planification des ressources humaines
Chargement des hauts fourneaux en sidérurgie
Planification des récoltes en agriculture

Question 3

Pour qu'un modèle mathématique soit un programme linéaire, il y a trois conditions :

Que toutes les variables soient continues (c'est-à-dire qu'elles peuvent être des fractions).

Qu'il n'y ait qu'un seul objectif (maximisation ou minimisation).

Que l'objectif et les contraintes soient linéaires, c'est-à-dire que chaque terme soit constant ou encore que le terme soit une constante multipliée par une inconnue.

Question 4

1.1 Si x et y sont les variables qui représentent respectivement le temps nécessaire pour produire des bandes et des bobines

Contrainte de temps

$x + y \leq 40$

Contrainte de tonnage

$200x \leq 6000$

$140y \leq 4000$

Fonction économique :

$$f(x, y) = 25(200x) + 30(140y)$$

Nous réécrivons le problème de la façon suivante :

Maximisation

$$f(x, y) = 5000x + 4200y$$

Tel que

$x + y \leq 40$

$200x \leq 6000$

$140y \leq 4000$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

Activité d'apprentissage 2
L'approche géométrique de la programmation linéaire

Objectifs d'apprentissage spécifiques

À la fin de cette section, l'étudiant devrait être en mesure de :

- Identifier et construire des équations linéaires;
- Construire les régions désirées suivant un ensemble d'inégalités, c'est-à-dire les régions possibles, pour un problème de programmation linéaire.
- Résoudre des problèmes de programmation linéaire suivant une approche géométrique.

Sommaire de l'activité d'apprentissage

Dans cette activité, nous introduisons la résolution de problèmes de programmation linéaire par la géométrie. Nous étudierons la région faisable, les solutions possibles, la solution optimale et la convexité. De façon géométrique, les contraintes linéaires définissent un polyèdre convexe, qui est nommé dans ce contexte une région faisable. Puisque la fonction économique est aussi linéaire, elle est aussi une fonction convexe. La linéarité de la fonction économique implique aussi qu'une solution optimale est possible à un point donné de la région faisable, à moins que la fonction économique ne soit constante et que, donc, chaque point est en soit un minimum global.

Remarque : Il existe deux situations où il n'est pas possible de trouver une solution optimale. La première situation est lorsque les contraintes se contredisent l'une l'autre (par exemple, $x \geq 2$ et $x \leq 1$) et dans ce cas, la région faisable est vide et il ne peut y avoir de solution optimale, puisqu'il n'y aucune solution. Dans ce cas, la programmation linéaire ne peut être résolue.

Termes-clés (voir le Glossaire)

Région faisable
Solutions possibles
Solution optimale et convexité
Ensemble de production faisable
Ensemble des possibilités de production ou ensemble d'opportunités
Points des extrémités
Problème non résoluble
Hyperplan
Demi-espace
Ensemble d'un polyèdre convexe
Cône d'un polyèdre convexe

Lectures obligatoires

- Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei
  www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf
  (site visité le 15-02-07)
- Lecture notes on Optimization par Pravin Varaiya
  http://robotics.eecs.berkeley.edu/~varaiya/papers_ps.dir/NOO.pdf
  (site visité le 10-02-07)

Liens utiles

- Linear Programming: A Geometric Approach
  http://www.wiley.com/college/sc/sullivan/CH03.pdf
  (site visité le 16-02-07)
- Graphical Solution Method
  http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/rpcotdp#rpcotdp
  (site visité le 21-02-07)
- Linear Programming : Geometric Approach
  www.math.tamu.edu/~janice.epstein/141/notes/Ch3.pdf
  (site visité le 16-02-07)

Description détaillée de l'activité

Au cours de cette activité, l'étudiant devra :

- Lire l'information disponible sur le site donné pour obtenir une compréhension de ce qu'est la résolution d'un problème de programmation linéaire par la géométrie. Cette étape procure à l'étudiant une idée générale de l'approche géométrique.
- Analyser l'exemple trouvé sur le site. Cet exemple aide l'étudiant à mieux saisir les étapes et les procédures suivies dans la résolution du problème.
- Faire l'exercice du manuel de référence Linear Programming : Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei.

Activités d'apprentissage

Un homme marchant le long d'une clôture séparant un champ.

Lecture

- Linear Programming : Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei, Section 5, page 22.
  www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf
  (site visité le 15-02-07)

Lecture supplémentaire

Veuillez aussi lire le texte sur le site suivant :

- Linear Programming: A Geometric Approach, pages 171 à 176
  http://www.wiley.com/college/sc/sullivan/CH03.pdf
  (site visité le 16-02-07)

Ce site vous permettra de mieux comprendre comment faire un graphe des inégalités et comment identifier les régions désirées, appelées régions faisables en programmation linéaire. La région faisable contient toutes les solutions possibles et à partir d'elles, nous pouvons trouver la solution optimale.

Remarque

Lorsqu'il y a deux ou trois variables dans un problème de programmation linéaire, les solutions possibles peuvent être déterminées graphiquement en traçant les graphes des inégalités des contraintes.

Voici les étapes essentielles à suivre pour résoudre un problème de programmation linéaire par la géométrie.

Étape 1 : Dessiner les graphes des contraintes
Étape 2 : Identifier la région faisable
Étape 3 : Dessiner le graphe de la fonction décisionnelle (deux fois)
Étape 4 : Trouver les points d'intersection à la région de faisabilité
Étape 5 : Évaluer la fonction décisionnelle à tous les points d'intersection de la région de faisabilité en :
Étape 6 : Identifiant le point optimal
Étape 7 : Trouvant les coordonnées de ce point optimal
Étape 8 : Évaluer la fonction décisionnelle de la solution optimale

Exemple :

En utilisant le problème suivant, appliquons les différentes étapes.

$f(x, y) = 5x + 7y$

Maximiser :

Selon que :

$x + y - 7 \leq 0$

$2x - 3y + 6 \geq 0$

$x \geq 0, y \geq 0$

1. Est-ce qu'il s'agit d'un problème pouvant être résolu par la programmation linéaire ?

Oui, si et seulement si toutes les variables sont d'une puissance 1 et qu'elles sont multipliées ou additionnées (pas de division ni de multiplication). La contrainte doit être exprimée sous une des formes suivantes (≤, ≥, ou =), ce qui indique que les contraintes sont toujours fermées.

2. Peut-on utiliser la méthode graphique?

Oui, s'il y a 1 ou 2 variables décisionnelles.

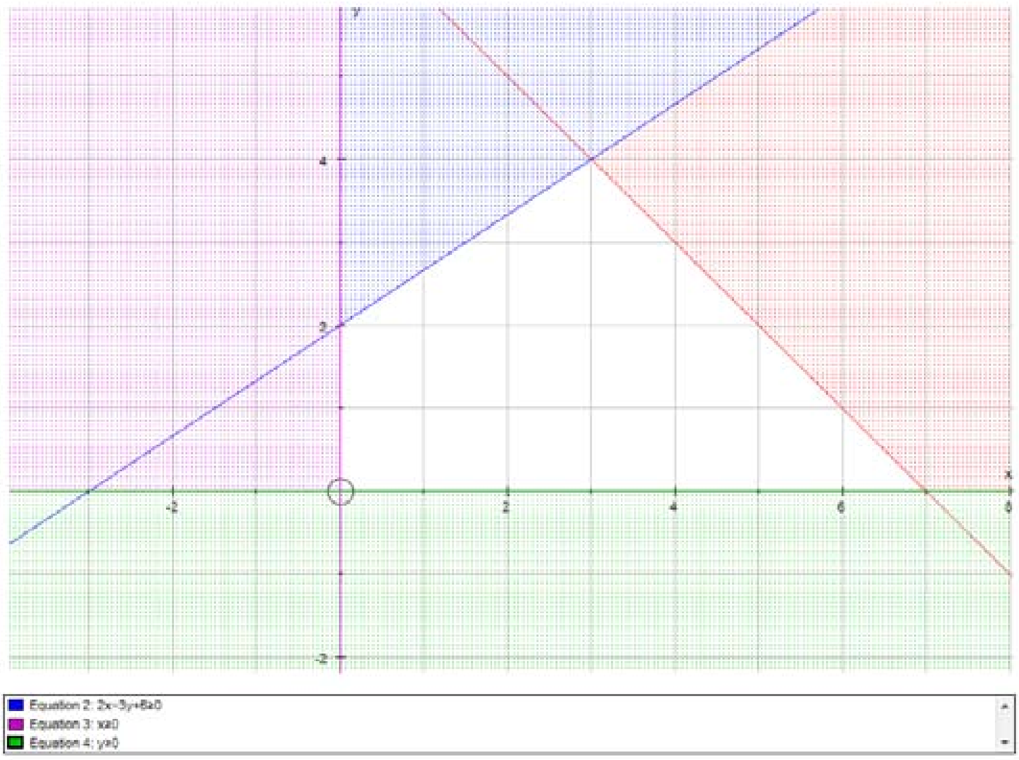
3. Utiliser du papier à graphique. Dessiner les contraintes.

$x + y - 7 \leq 0$

$2x - 3y + 6 \geq 0$

$x \geq 0, y \geq 0$

4. Ombrez la région non désirée de chacune des contraintes.



5. Rejeter les côtés qui ne sont pas réalisables.

Après que toutes les contraintes ont été rapportées sur le graphe, vous devriez obtenir une région de faisabilité non vide (convexe), à moins que le problème ne puisse être résolu.

6. Créer, au moins, deux valeurs équivalentes de la fonction économique, en utilisant deux nombres distincts. Dessiner les lignes qui en résultent. En déplaçant ces lignes parallèles, vous pourrez trouver le point d’extrémité (sommet optimal), s’il existe.

De façon générale, si la région de faisabilité est comprise dans le premier quadrant du système de coordonnées alors, pour les problèmes de maximisation, vous déplacez les valeurs équivalentes de la fonction économique *en vous éloignant du point d’origine* (0,0), tout en ayant un point commun avec la région de faisabilité. Cependant, pour la minimisation, le contraire est vrai, c’est-à-dire, que vous déplacez les valeurs équivalentes *en vous rapprochant du point d’origine*, tout en maintenant au moins un point commun avec la région de faisabilité. Le point commun est la solution optimale.

Exercice 2

Lire la page 24 de Linear Programming : Foundations and Extension par Robert J. Vanderbei. Faire les numéros 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 et 2.10.

Lectures supplémentaires

Visiter les sites suivants pour continuer la lecture sur la résolution par la géométrie.

- Linear Programming: A Geometric Approach, pages 171 à 176
  http://www.wiley.com/college/sc/sullivan/CH03.pdf

Il s'agit d'un problème où on maximise le profit.

- Linear Programming: A Geometric Approach www.math.tamu.edu/~janice.epstein/141/notes/Ch3.pdf
  (site visité le 16-02-07)

Solution de l'exercice 2

Pour trouver la solution du problème, allez à la page 449 de votre manuel de référence, Linear Programming : Foundations and Extension par Robert J. Vanderbei.

Section 2 :
Résolution et analyse

Activité d'apprentissage 3
Les conditions d'optimisation

Objectifs d'apprentissage spécifiques

À la fin de cette activité, l'étudiant devrait être en mesure de :

- Évaluer les dérivés et l'existence de l'optimisation.
- Faire la preuve des théorèmes d'optimisation.
- Expliquer et faire la preuve du théorème fondamental de la programmation linéaire.
- Vérifier les conditions d'optimisation pour résoudre un problème de programmation linéaire.
- Effectuer une analyse de sensibilité pour une solution optimale donnée.

Sommaire de l'activité d'apprentissage

Lors de cette activité, nous considérons les aspects informatiques des problèmes de programmation linéaire et effectuerons une analyse de sensibilité pour déterminer la stabilité d'une solution optimale lorsque certaines variables sont modifiées. La résolution du problème est effectuée en utilisant une méthode algébrique, c'est-à-dire en usant des notions de dualité, de la méthode simplexe, du Grand M et de l'algorithme primal mutuel. En conséquence, l'étudiant doit comprendre la section 1 avant d'entreprendre la section 2 puisque la transformation du problème de programmation linéaire en forme standard est nécessaire dans la résolution du problème de programmation linéaire par la méthode algébrique. Dans cette section, nous ferons l'analyse par les dérivatifs et les conditions d'existence de l'optimalité.

Termes-clés (voir le Glossaire)

Variables de base
Variables qui ne sont pas de base
Matrice complète
Pivot
Colonne pivot
Coefficient de contrôle
Tableau
Itération

Lecture

- Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf (Site visité le 15-02-07)
- Lecture notes on optimization par Pravin Varaiya http://robotics.eecs.berkeley.edu/~varaiya/papers_ps.dir/NOO.pdf (Site visité le 10-02-07)

Liens utiles

- Les conditions d'optimalité avec l'optimisation des contraintes http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Sloan-school-of-Management/15-084JSpring2004/7240EF84-B20D-419F-B1C0-2DAF3277F5C4/0/lec6_constr_opt.pdf
  (Site visité le 16-02-07)
- Conditions d'optimalité
  http://www.math.mtu.edu/%7Emsgocken/ma5630spring2003/lectures/lag1/lag1/node1.html
  (Site visité le 16-02-07)
- Solutions optimales alternatives, Dégénérescence, Limitabilité et Non-faisabilité
  http://mat.gsia.cmu.edu/QUANT/notes/node63
  html#SECTION00830000000000000000

Activités d'apprentissage

« Comment puis-je savoir si je suis arrivé à la meilleure position?»

Conditions d'optimalité

En termes simples, les conditions d'optimalité sont des conditions qui devraient vous confirmer si vous avez obtenu la solution optimale. Pour le problème de maximisation, si toutes les variables qui ne sont pas de base ont des coefficients négatifs ou nuls dans la fonction économique, une solution optimale a été obtenue. Si vous deviez substituer une des variables qui ne sont pas de base avec une valeur non négative (puisque les variables sont non négatives), alors la valeur de la solution finale est réduite. En conséquence, vous êtes assuré que la solution est optimale. De la même manière, pour un problème de minimisation, si toutes les variables qui ne sont pas de base ont un coefficient positif ou nul dans la fonction économique, une solution optimale a été obtenue.

Lecture

Pour les conditions d'optimalité d'un problème de programmation linéaire et du théorème fondamental de la programmation linéaire, lisez

- Linear Programming : Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei
  www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf
  (Site visité le 15-02-07)

Lectures supplémentaires

http://engr.smu.edu/~barr/ip/ch1/node7.html

http://www.maths.abdn.ac.uk/~igc/tch/mx3503/notes/node67.htm

Exercice 3

Voir l'exemple de la page 13 de Linear Programming : Foundations and Extension par RobertJ. Vanderbei, ainsi que la solution donnée aux pages 15 et 16.

Maintenant, faites cet exercice adapté de Wagner (1975).

Vérifier les conditions d'optimalité du problème de programmation linéaire suivant :

Maximisation de $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$

Selon que

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\
&7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\
&3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100 \\
&x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Solution

Si x0 est la valeur de la fonction économique, ajoutez aux contraintes les variables d'écart x5 , x6 , x7 afin de créer une égalité. Puis, écrivez un système d'équations, tel que

x0 - 4x1 + 5x2 -9x3 -11x4 =0

x1 +x2 +x3 +x4 +x5 =15

7x1 +5x2 +3x3 +2x4 +x6 =120

3x1 +5x2 +10x3 +15x4 +x7 =100

Après que vous avez fait quatre itérations de la méthode du simplexe, vous arrivez à une étape où les variables qui ne sont pas de base x2 , x4 , x5 or x7 ne peuvent avoir pour valeur que 0. Donc,

$$x_0 = \frac{695}{7} - \frac{3}{7}x_2 - \frac{11}{7}x_4 - \frac{13}{7}x_5 - \frac{5}{7}x_7$$

Ce qui constitue la condition d'optimalité qui nous permet de terminer l'itération.

Activité d'apprentissage 4
L'approche algébrique

Objectifs d'apprentissage spécifiques

À la fin de cette section, vous serez en mesure de :

- Interpréter les dérivatifs et l'existence de l'optimalité.
- Appliquer la méthode du Grand M (pénalité) et la méthode du simplexe de dualité.
- Faire la différence entre les propriétés de dualité, de l'algorithme primaire mutuel et l'algorithme de dualité simplexe.
- Suivre une méthode étape par étape pour des algorithmes donnés, c'est-à-dire les algorithmes mentionnés plus haut.
- Résoudre des problèmes de programmation linéaire avec l'aide de logiciels mathématiques (lorsque disponibles).

Résumé de l'activité d'apprentissage

Dans cette activité, vous apprendrez comment résoudre algébriquement un problème de programmation linéaire.

L'algorithme principal vu est le simplexe. Cet algorithme a été développé par George Dantzig (1947) et permet de résoudre les problèmes de programmation linéaire en construisant une solution admissible au vertex d'un polyèdre et, suivant les côtés de la figure jusqu'au sommet ayant des valeurs de plus en plus élevées de la fonction économique jusqu'à ce que la solution optimale soit obtenue. Bien que cet algorithme soit très utile en pratique et amène nécessairement à un optimum global si certaines précautions contre une hyper itération sont prises, l'algorithme ne se comporte pas bien pour les situations les plus défavorables : il est possible de construire un problème linéaire pour lequel la méthode du simplexe prend un nombre exponentiel d'étapes en fonction de la taille du problème. En réalité, pour un certain nombre d'années, on ne savait pas si on pouvait résoudre un problème de programmation linéaire en temps polynomial.

Termes-clés (voir le Glossaire)

Base
Variables de base
Variables qui ne sont pas de base
Variable d'écart
Variable de surplus
Variable artificielle

Solution basique
Dégénérescence
Problème primaire
Problème de dualité
Dualité faible
Dualité forte
Faisabilité primaire
Faisabilité de dualité

Lectures obligatoires

- Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei
  www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf
  (Site visité le 15-02-07)
- Lecture notes on optimization par Pravin Varaiya
  http://robotics.eecs.berkeley.edu/~varaiya/papers_ps.dir/NOO.pdf
  (Site visité le 10-02-07)

Liens utiles

- Simplex Method - Big M
  http://www.math.uwo.ca/~heinicke/courses/236_03/bigM.pdf
  (Site visité le 15-02-07)
- Simplex Method – Big M
  http://www.computing.dcu.ie/~lkillen/teach/CA427Simplexbigmexample
  (Site visité le 15-02-07)
- Dual Problem: Construction and Its Meaning
  http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/rpcotdp#rpcotdp
- Sensitivity Analysis for Linear Programming
  http://mat.gsia.cmu.edu/QUANT/notes/node64.html
  (Site visité le 20-02-07)

Description détaillée de l'activité

L'étudiant sera amené à :

- Lire les pages 13 à 28, 29 à 43 et 89 à 107 du manuel de référence Linear Programming: Foundations and Extensions sur la méthode simplexe.
- Analyser l'exemple que vous retrouverez sur le site suivant , Simplex Method - Big M
  http://www.math.uwo.ca/~heinicke/courses/236_03/bigM.pdf
  (Site visité le 15-02-07)
- Faire l'exercice du manuel de référence Linear Programming: Foundations and

Extensions sur la méthode simplexe à la page 13 (2.1, 2.2, 2.3 et 2.4.).

En plus de faire les lectures suggérées portant sur la logique de l'algorithme simplexe et de faire quelques exercices pratiques sur des problèmes de programmation linéaire, l'étudiant sera encouragé à effectuer ces procédures à l'aide de logiciels mis à la disposition de l'étudiant.

Activités d'apprentissage

Une femme, portant un bébé sur son dos, se demande qu'elle serait la meilleure façon de traverser une rivière au débit rapide.

La méthode simplexe

Les méthodes en programmation linéaire sont basées sur la théorie des matrices et la théorie de la dimension finie des espaces vectoriels et la méthode du simplexe pour résoudre les problèmes de programmation linéaire est bâtie autour de la solution de base d'un ensemble d'équations linéaires simultanées. Pour de plus amples informations sur les solutions de base et sur les espaces vectoriels, relisez votre module portant sur l'algèbre linéaire ou faites l'exemple bien illustré de Richard S. Barr sur le lien suivant :

http://engr.smu.edu/~barr/ip/ch1/node6.html

Lorsque vous résolvez un problème de programmation linéaire au moyen de l'algorithme du simplexe, il importe de se rappeler les étapes importantes à suivre

1. Formater le tableau simplexe initial.
2. Situer le pivot du tableau.
3. Si le pivot est 1, passez à l'étape 4. Sinon, divisez la rangée du pivot par le pivot, afin d'obtenir 1 comme position de pivot.
4. Convertir le reste des entrées de la colonne de pivot par des zéros en utilisant la rangée des opérations élémentaires (comme vous l'avez appris dans le module Algèbre linéaire).

5. Répéter les étapes 2 à 4 jusqu'à ce que le tableau n'ait plus d'indicateurs négatifs. C'est le tableau final dont nous avons besoin pour cet algorithme et il est appelé le simplexe **final**.
6. La solution optimale et la valeur maximale de la fonction économique peuvent alors être extraites de ce tableau final.

Prenons l'exemple adapté de Koshy (1979) pour illustrer les différentes étapes à suivre :

Maximiser

$$f(x, y) = 170x + 225y$$

Selon que:

$$x + y \leq 300$$

$$2x + 3y \leq 720$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

Étape 1 Formater le tableau simplexe initial

Introduisons deux variables d'écart $s1 \geq 0$ et $s2 \geq 0$ et ensuite les deux premières inégalités peuvent être écrite comme suit :

$$x + y + s1 = 300$$

$$2x + 3y + s2 = 720$$

Nous avons donc un système d'équations :

$$x + y + s1 = 300$$

$$2x + 3y + s2 = 720$$

$$-170x - 225y + f = 0$$

Formant ainsi le tableau simplexe initial :

x	y	s_1	s_2	f	rhs
1	1	1	0	0	300
2	3	0	1	0	720
-170	-225	0	0	1	0

Étape 2 – Situer le pivot du tableau

x	y	s_1	s_2	f	rhs
2	1	1	0	0	300
2	**3**	0	1	0	720
-170	-225	0	0	1	0

La rangée pivot
La colonne pivot
Le pivot

Étape 3 – Puisque le pivot est 3, nous divisons la deuxième rangée par 3

x	y	s_1	s_2	f	rhs
1	1	1	0	0	300
2/3	1	0	1/3	0	240
-170	-225	0	0	1	0

Étape 4 - Si on ajoute -1 fois le deuxième au premier et 225 fois la deuxième rangée à la troisième rangée, nous obtenons :

x	y	s_1	s_2	f	rhs
1/3	0	0	-1/3	0	60
2/3	1	0	1/3	0	240
-20	0	0	75	1	54000

Nouveau pivot

Étape 5 – Le nouveau pivot est 1/3; nous divisons la première rangée par 1/3 et nous ajoutons ensuite -2/3 fois la première rangée à la seconde et 20 fois la première rangée à la troisième.

x	y	s_1	s_2	f	rhs
1	0	3	-1	0	180
0	1	-2	1	0	120
0	0	60	55	1	57600

Valeur maximale

Étape 6 – Ce tableau est la matrice complète du système d'équations suivant :

$$x + 3s_1 - s_2 = 180$$
$$y - 2s_1 + s_2 = 120$$
$$60s_1 + 95s_2 = 57\,600$$

Qui est :

$$x = 180 - 3s_1 + s_2$$
$$y = 120 + 2s_1 - s_2$$
$$f = 57600 - 60s_1 - 95s_2$$

f a une valeur maximale de 57 600 lorsque $s_1 = 0$ et $s_2 = 0$, ce qui donne $x = 180$ *and* $y = 120$

Remarque

Les valeurs de *f, x t y* peuvent facilement être extraites du simplexe terminal, donc la solution optimale et la valeur maximale de la fonction économique peuvent être extraites du tableau terminal.

La méthode du Grand M

Dans le cas où on ne peut trouver une solution initiale faisable, nous pouvons utiliser la méthode du Grand M avec laquelle vous ajoutez grand entier positif $M > 0$.

Pour illustrer comment on utilise la méthode du Grand M, suivons l'exemple adapté de Wagner (1975).

Maximisez $f(x1, x2) = 3x1 + 2x2$

Selon que

$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Puis, après avoir ajouté une variable de surplus x_3 dans l'inégalité, vous pouvez écrire le modèle de la façon suivante :

$$x_0 + 3x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1 - x_3 = 4$$

Où $f(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2$ a été réécrit

$x_0 + 3x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{where } x_0 = f(x_1, x_2)$

Ensuite, vous ajoutez les variables artificielles y_1 et y_2, et si M =10 pour notre grand entier positif, par exemple, on obtient :

$$x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 10y_1 + 10y_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 10$$
$$x_1 - x_3 + y_2 = 4$$

Pour mettre en fonction l'algorithme, vous devez soustraire (M =10) fois la rangée 2 et (M =10) fois la rangée 3 de la rangée 1 pour éliminer y_1 et y_2 :

$$x_0 - 17x_1 - 8x_2 + 10x_3 = -140$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 10$$
$$x_1 - x_3 + y_2 = 4$$

À partir de cette étape, vous pouvez appliquer la méthode du simplexe. Vous pouvez faire la preuve que $x_1 = 4$ et $x_2 = 6$ sont les solutions optimales.

Lectures supplémentaires

Lisez sur la méthode du simplexe sur le site suivant :

- The Simplex Method: http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/simplex/feasible.html

Activité supplémentaire

Le lien suivant explique la méthode du simplexe d'une façon conviviale. Faites les activités suggérées et répondez ensuite aux questions ci-après.

http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/simplex/feasible.

1. Donnez la nature d'un problème de maximisation standard.
2. Que se passe-t-il à l'étape du tableau initial de la méthode du simplexe?

Exercice 4

Les tableaux suivants ont été obtenus en cours de résolution d'une programmation linéaire avec les variables non négatives x_1 et x_2, deux contraintes d'inégalité, une fonction économique z et la maximisation. Les variables d'écart s_1 et s_2 ont été ajoutées. Dans chaque situation, indiquez si la programmation linéaire :

(i) est sans bornes
(ii) n'a qu'une seule solution optimale
(iii) a une solution optimale alternative
(iv) est dégénérée (dans ce cas, indiquez si les énoncés précités tiennent).

a)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
1	0	3	2	0	20
0	1	-2	-1	0	4
0	0	-1	0	1	2

b)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
1	0	-1	0	2	20
0	0	0	1	-2	5
0	1	-2	0	3	6

c)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
1	2	0	0	1	8
0	3	1	0	-2	4
0	-2	0	1	1	0

d)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
1	0	0	2	0	5
0	0	-1	1	1	4
0	1	1	-1	0	4

Suggestion : Les solutions de l'exercice 4 peuvent être facilement obtenues en vous référant aux définitions de "sans bornes", "solution unique optimale", "solution optimale alternative" et "dégénérescence".

Formulation d'un problème de dualité

Chaque programme linéaire a un autre programme linéaire associé, appelé son **dual** qui partage les mêmes données et qui est dérivé par des arguments rationnels. Dans ce contexte, le programme linéaire original est appelé le programme linéaire **primaire**. Les variables du problème dual sont différentes de celles du programme primaire, chaque variable duale est associée à une contrainte primaire, c'est la valeur marginale ou le multiplicateur de Langrange qui correspond à cette contrainte.

Le problème rencontré par le directeur de la production, l'optimiste et du contrôleur, le pessimiste, dans Linear Programming : Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei, au chapitre 1, décrit un problème de dualité. Le problème de l'allocation des ressources au chapitre 5 (pages 73 à 78) du même manuel est une bonne illustration de la formulation d'un problème de dualité à partir du problème primaire. Exemple adapté de Arsham (2007), voir le lien [http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/

partVIII.html].

Illustrons maintenant la formulation d'un problème de dualité avec le problème d'un tailleur :

Intrants non contrôlés

	pantalons	chemises	disponibilité
main d'oeuvre	3	2	50
Matières premières	4	3	60
Revenu net	20	15	

Sa programmation linéaire est donc :

Maximiser

$$f(x_1, x_2) = 20x_1 + 15x_2$$

subject to:

$3x_1 + 2x_2 \le 50$ labour constraint

$4x_1 + 3x_2 \le 60$ material constraint

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Contrainte de main d'œuvre

Contrainte de matières premières

Et où x_1 et x_2 représentent le nombre de pantalons et le nombre de chemises à faire.

Supposons que le tailleur désire contracter une assurance pour couvrir son revenu net. Soit z_1 , le montant payable en dollars au tailleur pour chacune des heures de travail perdues en raison de problèmes imprévisibles et z_2 ,le montant payable en dollars au tailleur pour la perte de chaque unité de matières premières.

Le courtier d'assurance essaie de minimiser le montant total payable au tailleur par la compagnie d'assurance, soit $(50z_1 + 60z_2)$ \$. Cependant, le tailleur établit les contraintes (les conditions) en soutenant que la compagnie d'assurance couvre toutes ses pertes (c'est-à-dire, son revenu net) puisqu'il ne peut produire la marchandise (pantalons et chemises). Par conséquent, le problème du courtier est :

Minimiser

$$
\begin{aligned}
& f(z_1, z_2) = 50z_1 + 60z_2 \\
& \text{subject to:} \\
& 3z_1 + 4z_2 \geq 20 \quad \text{Net income from a trouser} \\
& 2z_1 + 3z_2 \geq 15 \quad \text{Net income from a shirt} \\
& z_1 \geq 0, z_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Revenu net pour un pantalon

Revenu net pour une chemise

En trouvant les réponses à ce problème, nous remarquons que le problème de la compagnie d'assurance s'apparente à celui du tailleur.

Lecture

Veuillez lire maintenant le texte suivant :

- Linear Programming: Foundations and Extensions de Robert J. Vanderbei, chapitre 5, pages 55 à 79. [www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf] (Site visité le 15-02-07)

Le théorème de la dualité

a) Dans l'éventualité où le problème primaire et le problème dual ont des solutions possibles, alors le problème primaire a une solution optimale x^*_j , pour j= 1, 2, …., n et le problème dual a une solution optimale y^*_i , pour i = 1, 2, ….., m, et

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

b) Si le problème primaire ou le problème dual a une solution possible avec une valeur finie optimale à la fonction économique, alors l'autre problème aura aussi une solution finie optimale à la fonction économique.

Remarque

La relation de dualité peut être résumée ainsi :

Primaire (Maximiser) Dual (Minimiser)

Primaire (Maximiser)	**Dual (Minimiser)**
Fonction économique	Côté droit
Côté droit	Fonction économique
jème colonne de coefficients	jème rangée de coefficients
ième rangée de coéfficients	i'ème colonne de coefficients
jème variable non négative	jème relation d'inégalité (≥)
jème variable sans restriction de signe	jème relation une égalité
ième relation d'inégalité (≤)	
ième relation d'égalité	ième variable non négative
	ième variable sans restriction de signe

Exemple [adapté de Wagner (1975)]

Voici un exemple didactique pour illustrer la formation d'un problème dual à partir d'un problème primaire.

Maximiser

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

Selon que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_j \geq 0$$

Pour j =1, 2, 3, 4

Le problème dual peut facilement être obtenu en utilisant les relations de dualité de la table montrée plus haut :

Minimiser

$$15y_1 + 120y_2 + 100y_3$$

Selon que :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_j \geq 0$$

Exercice 5

1. Dans vos termes, expliquez ce que vous comprenez d'un problème dual en programmation linéaire.
2. Énoncez le théorème de la dualité et faites-en la preuve.
3. Répondez aux questions 5.1 , 5.2 et 5.16 de la page 79 du manuel Linear Programming : Foundations and Extensions par Vanderbei.

Lectures supplémentaires

Pour des exemples supplémentaires de formulation de problèmes duaux, suivez le lien suivant : http://www.maths.abdn.ac.uk/~igc/tch/mx3503/notes/node66.html

- Dualité en programmation linéaire, Conditions d'optimalité
  http://www-personal.umich.edu/~murty/310/310-2slides8.pdf -
- Dualité, Conditions d'optimalité
  http://www.caam.rice.edu/~yzhang/caam378/Notes/chap5.pdf

Solutions de l'exercice 5

Question 1

Relisez le problème du tailleur ou celui de l'allocation des ressources et expliquez-le à un collègue.

Question 2

Théorème de la dualité forte et théorème de la dualité faible, combinés ensemble.

Question 3

Pour la question 5.1, on nous donne le problème comme suit :

Maximiser

x1 -2x2

Selon que :

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 0 \\
&4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 3 \\
&-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\
&x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Nous réécrivons le problème comme suit :

Maximiser $x_1 - 2x_2$

Selon que :

$$
\begin{aligned}
&-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 0 \\
&4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 3 \\
&-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1 \\
&x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \leq -1
\end{aligned}
$$

Le dual de ce problème est par conséquent :

Minimiser $3y_2 + y_3 - y_4$

Selon que :

$$
\begin{aligned}
-y_1 + 4y_2 - y_3 + y_4 &\geq 1 \\
2y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 &\geq -2 \\
y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 2y_4 &\geq 0 \\
-y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

5.2 Pour résoudre ce problème, vous référez au théorème 5.2 de la page 60 du manuel de référence Linear Programming: Foundations and Extensions. Trouver le dual, tel qu'illustré dans le problème mentionné plus haut.

Activité d'apprentissage 5
L'Analyse de sensibilité

Objectif spécifique d'apprentissage

À la fin de cette activité, l'étudiant devrait être en mesure de :

- Exécuter une analyse de sensibilité pour une solution à un problème de programmation linéaire.
- Expliquer les raisons pour exécuter une analyse de sensibilité.

Résumé de l'activité d'apprentissage

Au cours de cette activité, nous pourrons répondre aux questions de post-optimalité telles que :

1) Si la contribution du profit d'une activité de base particulière diminue, est-ce que la solution optimale reste la même?
2) Qu'arrive-t-il si la disponibilité de la ressource est restreinte?
3) Qu'arrive-t-il si une activité nouvelle est ajoutée?
4) Jusqu'où les valeurs des paramètres des intrants peuvent-elles varier sans causer un fort changement à la solution optimale?

Nous allons aussi effectuer des analyses marginales et paramétriques et apprendre ce qui intervient dans chacune de ces analyses. Les étudiants doivent effectuer des analyses de sensibilité sur des solutions optimales données, solutions trouvées à l'activité 4.

Termes-clés (voir le Glossaire)

Analyse paramétrique
Analyse marginale

Lectures obligatoires

- Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei
  www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf
  (Site visité le 15-02-07)
- Lecture notes on optimization par Pravin Varaiya
  http://robotics.eecs.berkeley.edu/~varaiya/papers_ps.dir/NOO.pdf
  (Site visité le 10-02-07)

Liens utiles

- Sensitivity Analysis
  http://www.jr2.ox.ac.uk/bandolier/booth/glossary/sensanal.html
  (Site visité le 15-02-07)
- Sensitivity Analysis
  http://pespmc1.vub.ac.be/ASC/SENSIT_ANALY.html
  (Site visité le 15-02-07)
- Sensitivity Analysis
  http://en.wikipedia.org/wiki/sensitivity_analysis
  (Site visité le 15-02-07)
- Management Science: Linear Programming Notes
  http://www.strathcona.bham.ac.uk/Pdfs1%20management%20Course%20Year%202/LINEAR%20PROGRAMM%20NOTES.PDF

Description détaillée de l'activité

L'étudiant effectuera des lectures portant sur la définition de l'analyse de sensibilité et les raisons pour lesquelles elle est effectuée. La référence ultime reste le manuel de référence Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei, qui explique très bien la raison d'être de l'analyse de sensibilité.

On encourage les étudiants à discuter entre eux de ce sujet et de faire des calculs pratiques associés à l'analyse de sensibilité en utilisant les logiciels appropriés et accessibles. Pouvoir interpréter les résultats d'une analyse de sensibilité est aussi un exercice important dans la mesure où cette capacité a une influence directe sur les processus de prise de décision. Plusieurs liens expliquent l'analyse et donnent des exemples de passages-machine. L'étudiant pourra de ce fait améliorer sa compréhension de la notion de l'analyse de sensibilité en programmation linéaire.

Activités d'apprentissage

Reprenons le problème du directeur de la production que nous avons vu à l'activité 1. Même dans les situations normales d'affaires, il y a plusieurs facteurs qui influencent la production et, par conséquent, les profits. Supposons que le directeur a été avisé par le comité de planification qui a résolu le problème de programmation linéaire associé, de maintenir les ordres d'achat à des entrepôts, de certains matériels et de certaines matières, à des quantités spécifiques. Ces quantités seraient directement liées à la solution optimale (production ou profits) selon ces circonstances. Maintenant, considérons une situation d'environnement inflationniste dans le pays, accompagnée d'une économie stagnante. Les facteurs influant la production auront, sans aucun doute, un impact différent sur le processus de production, en fonction de la disponibilité et des coûts des matières premières et des coûts de distribution des produits finis. Les variations sont souvent différentes pour chaque facteur et imprévisibles en terme de temps et de taille. Selon ces circonstances, le directeur serait très intéressée de savoir l'impact qu'auront ces changements sur les facteurs individuels ou une combinaison de ceux-ci et ultimement sur la solution optimale. C'est ici que l'analyse de sensibilité entre en jeu. Techniquement, cet exercice analyse les changements dans les coefficients de la fonction économique (les coûts liés aux unités produites) ou encore les côtés droits des contraintes (les conditions) et comment ils modifient la solution optimale.

Exposé [adapté de Trick (2007)]

http://mat.gsia.cmu.edu/QUANT/notes/node64.html

Question : Par quoi commence-t-on une analyse de sensibilité?

Réponse : Si nous exécutons les itérations de la méthode simplexe sur le tableau initial suivant :

f x y	s_1 s_2	RHS
0 3 1 0 2 3	1 0 0 1	300 720
1 -170 -225	0 0	0

Nous obtenons le tableau final appelé le tableau terminal

x y f	s_1 s_2	RHS
1 0 0 **0 1 0**	3 -1 -2 1	180 120
0 0 1	60 55	57600

Il n'y a que des valeurs non négatives dans la rangée 0 (la rangée des coûts), des valeurs non négatives du côté droit et une matrice de base combinée. L'analyse de sensibilité commence à cette étape pour déterminer les effets de petits changements à la solution optimale. Nous tenterons de déterminer comment ce changement modifie le tableau final et tenter de reformater le tableau final en conséquence

Modifier les valeurs des variables de décision

La première modification que nous allons faire est celle de la valeur du coût, c'est-à-dire les valeurs de x et de y du problème original. Nous allons changer un peu ces valeurs par ϵ. Si nous exécutons le calcul pour trouver la solution optimale pour la valeur modifiée ϵ de x du problème original, nous arrivons au même tableau final que précédemment, à la différence près que ϵ sera plus petite, en raison du changement effectué (nous n'avons qu'additionné ou soustrait des multiples scalaires des rangées 1 à m aux autres rangées; nous n'avons pas ajouté ou soustrait la rangée 0 des autres rangées).

f	x	y	s_1	s_2	RHS
0	$3+\epsilon$	1	1	0	300
0	2	3	0	1	720
1	-170	-225	0	0	0

Faites le calcul et confirmez l'énoncé cité plus haut.

Changements au côté droit du tableau

Pour ces types de changements, concentrons-nous sur les problèmes de maximisation avec des contraintes de type $\leq$. Les autres cas suivent un procédé similaire.

Considérons le problème suivant:

Maximiser

$$f(x, y) = 4x + 5y$$

Selon que :

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\leq 12 \\ x + y &\leq 5 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Le tableau optimal après avoir ajouté les variables d'écart s_1 et s_2 est :

z	x	y	s_1	s_2	RHS
1	0	0	1	2	22
0	0	1	1	-2	2
0	1	0	-1	3	3

Maintenant, supposons que nous modifions le montant du côté droit de 22 à (22+□) dans la première contrainte. Le tableau est modifié comme suit :

z	x	y	s_1	s_2	RHS
1	0	0	1	2	$22+\epsilon$
0	0	1	1	-2	$2+\epsilon$
0	1	0	-1	3	$3-\epsilon$

Ce tableau représente un tableau optimal pourvu que le côté droit donne des valeurs non négatives. En d'autres mots, nous avons besoin que ϵ soit entre -2 et 3 afin que la base ne soit pas modifiées. Pour tous les ϵ parmi cet écart, la décision optimale sera $(22+\epsilon)$. Par exemple, si, ϵ est égale à 2, la nouvelle décision sera 24 avec y = 4 et x = 1.

De la même manière, si nous changeons le côté droit de la deuxième contrainte, de 5 à $(5 + \epsilon)$ de la formulation originale, nous obtenons une fonction économique égale à $(22 + 2\epsilon)$ dans le tableau final, pourvu que $-1 \leq \epsilon \leq 1$.

De façon générale, l'analyse de sensibilité vérifie ce qui arrive à la solution optimale suite à des changements dans la disponibilité des matières premières ou dans la valeur au marché. Elle met en évidence les changements aux variables qui modifient la solution optimale et les changements qui n'ont aucun impact sur la solution optimale.

Lecture et Exposé

- Lire Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei, chapitre 7, page 111 à 120 : www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf
  (Site visité le 15-02-07) et discutez-en avec un collègue.
- Sensitivity Analysis
  http://en.wikipedia.org/wiki/sensitivity_analysis
  (Site visité le 15-02-07)

  Utilisez les outils informatiques disponibles (logiciels, tels que Pivot Tool) pour exécuter des analyses de sensibilité pour deux solutions optimales de problèmes de programmation linéaire obtenues au préalable dans des exercices précédents.

  Interprétez les résultats des analyses et discutez vos résultats avec un collègue.

  Pivot Tool: http://campuscgi.princeton.edu/~rvdb/JAVA/network/nettool/netsimp.html

Exercice 6

- Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei, chapitre 7, page 120, no 7.1 et 7.
  www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf
  (Site visité le 15-02-07)

Activité supplémentaire

- Optimization Methods Lecture 7 Sensitivity Analysis
  http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Sloan-School-of-Management/15-093Fall-2004/8842223F-9C8A-4B9E-83F8-DD28DE270140/0/lecture07.pdf
- Management Science: Linear Programming Notes
  http://www.strathcona.bham.ac.uk/Pdfs1%20management%20Course%20Year%202/LINEAR%20PROGRAMM%20NOTES.PDF

Solution de l'exercice 6

Vous trouverez la solution à la page 449, de Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei.

XI. Glossaire des termes-clés

Matrice complète

Elle est formée par le coefficient du dictionnaire d'un problème de programmation linéaire.

Variable artificielle

Une variable ajoutée à une programmation linéaire à l'étape 1 pour trouver une solution possible.

Solution de base

x de (*Ax* = *b*) est une *solution de base si* les éléments *n* de *x* peuvent être séparés en *m* « variables de base » et *n-m* «variables de non base » de telle façon que :

- Les colonnes *m* de *A* qui correspondent aux variables de base forment une base non singulière et
- la valeur de chaque variable qui n'est pas de base est 0.

Base

L'ensemble des variables de base.

Variable de base

Une variable de la solution de base (sa valeur n'est pas 0).

Contraintes

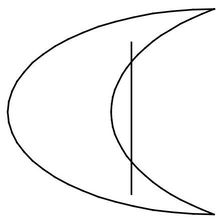
Un ensemble d'égalités et d'inégalités qu'une solution possible satisfait.

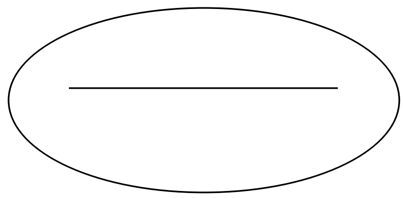
Convexe

Est un ensemble de points *S* dans l'espace *n* ombré, tel que si le segment de ligne rencontre deux points $X_1, X_2 \in S$, appartient entièrement à *S*. La définition mathématique de la convexité est exprimée comme suit :

$$S \text{ convex} \Leftrightarrow \forall X_1, X_2 \in S_2, \forall x \in (0,1) : (1-x)X_1 + xX_2 \in S$$

Ensemble convexe





Non convexe

Convexe

Itération

L'itération est définie comme étant lorsqu'une séquence de pivots est appliquée aux mêmes tableaux et se répète indéfiniment.

Dégénérescence

Elle survient lorsqu'une variable de base donnée est à une de ses bornes (normalement 0).

Sans aucune qualification donnée, une solution de base est dégénérée si une ou plus d'une de ses valeurs de base est 0 (la plus basse des bases).

Dictionnaire

C'est un système d'équations de la fonction économique et des équations de contraintes après l'introduction des variables d'écart.

Dégénérescence duale

C'est une solution où une des variables de non base a un coût réduit à 0. En général, une solution est dégénérée si elle n'est pas strictement complémentaire.

Dualité

On peut dire qu'une **dualité est faible, si** x, p sont des solutions possibles à des problèmes primaires ou duaux respectivement, alors $b'p \leq c'x$.

On peut dire qu'une **dualité est forte** lorsqu'un problème primaire a une solution optimale et que le problème dual a aussi une solution $c'x^* = b'p^*$ [où x^* et p^* sont les solutions optimales du problème primaire et dual respectivement].

Faisabilité

Un point est faisable s'il satisfait toutes les contraintes. La région faisable (ou la région de faisabilité) est l'ensemble de tous les points faisables. Un programme mathématique est faisable si sa région de faisabilité est non vide.

Faisabilité primaire

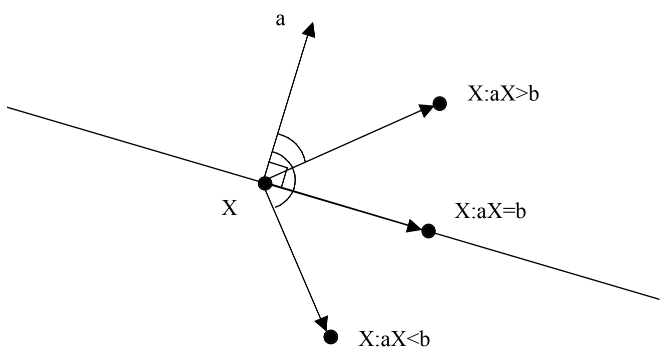
Signifie avoir une solution possible à un problème de programmation linéaire.

Faisabilité duale

Signifie avoir une solution possible à un problème de programmation linéaire dual.

Solution possible

Un vecteur de solution, ***x,*** qui satisfait les contraintes.



Demi-plans

La région faisable d'une inégalité linéaire.

Par exemple, les demi-plans de l'inégalité $a_1X_1 + a_2X_2 \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} b$ sont les plans à gauche et à droite de l'égalité $a_1X_1 + a_2X_2 \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} b$.

Soit une contrainte :

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b(**)$$

$$X_0 = \langle X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0n} \rangle^T$$

Et un point qui satisfait l'équation (**) d'égalité, nous pouvons percevoir l'espace de solution de l'équation :

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots.. + a_nX_n = b$$

Hyperplan

Il est l'espace de solution d'une équation linéaire générale à variable *n :*

a1X1 +a2 X2 +..... +an Xn –b=0

Droites d'isoprofit

Ce sont les droites de la fonction économique qui sont tracées pour trouver la valeur optimale lorsqu'on utilise la méthode géométrique.

Problème de programmation linéaire

C'est un ensemble d'inégalités (linéaires) (avec un ensemble de solutions S) et une fonction (linéaire) (souvent coûts ou profits) pour laquelle la valeur (élément de S) doit être maximisée ou minimisée.

Analyse marginale

Concerne les effets de petites perturbations, qui peuvent parfois être mesurées par les dérivatifs.

Variables qui ne sont pas de base

Une variable qui ne fait pas partie de la solution de base (valeur = 0).

Fonction économique

C'est la fonction qui doit être minimisée ou maximisée. Par exemple, elle peut représenter le coût que vous tentez de minimiser.

Recherche opérationnelle

Parfois connue sous le terme de la science de la gestion, elle réfère au suivi continu des activités d'une organisation, principalement la prise de décision et les problèmes de contrôle qui touchent aux opérations. Cela implique la représentation par des modèles mathématiques de situations réelles et à l'usage des méthodes quantitatives (algorithmes) pour résoudre ces modèles dans le but d'une optimalisation.

Solution optimale (vecteur)

Un vecteur ***x*** qui est à la fois faisable (satisfaisant les contraintes) et optimal (qui obtient la valeur de décision la plus élevée ou la plus faible).

Solution optimale

C'est la solution possible maximale ou minimale qui est obtenue à la dernière étape de l'algorithme dusimplexe.

Analyse paramétrique

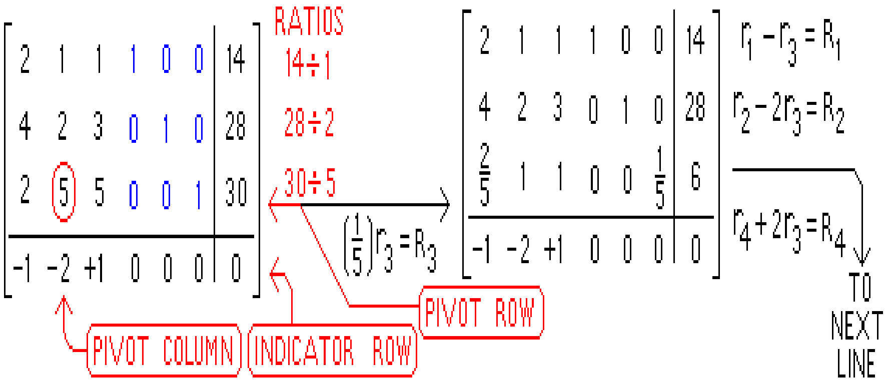
Implique des changements importants dans la valeur des paramètres qui influent sur les données du programme mathématique, tel que le coefficient de coûts ou les limites des ressources.

Étape 1 & Étape 2

L'étape 1 d'un programme mathématique est de trouver une solution possible. La phase 2 utilise la solution possible pour obtenir la solution optimale.

Pivot

Il s'agit de l'algèbre associée avec l'itération du théorème d'élimination de Gauss-Jordan qui utilise *la transformation par devant.* (voir l'illustration ci-dessous)



Polytope

L'espace de solution (région faisable) d'un programme linéaire à *n* variable est défini géométriquement par l'intersection d'un nombre de sous-espaces ou/et hyperplans égal aux contraintes du programme linéaire, incluant les restrictions de signe.

Polyèdre

C'est un polytope fini.

Établissement des prix

Il s'agit d'une tactique dans la méthode du simplexe par laquelle chaque variable est évaluée pour son potentiel à améliorer la valeur de la fonction économique.

Dégénérescence primaire

C'est un pivot ou la solution de base associée (x) ne change pas (c'est-à-dire que la variable qui n'est pas de base est entrée dans la base, mais son niveau demeure égal à sa valeur finie, dans quel cas aucune des variable de base ne change le niveau

Analyse de sensibilité

Évalue comme les changements effectués aux données ou à certaines valeurs de solution (en fixant leur valeur) modifient la solution.

Méthode simplexe

C'est un algorithme inventé pour résoudre un programme linéaire en progressant d'un point extrême du polyèdre faisable à un autre point adjacent. Cette méthode est un algorithme de stratégie par exemple l'établissement des prix et la sélection du pivot.

Simplexe

{x dans R: Somme{xj} = 1}. Pour n=1, c'est un point (x=1). Pour n=2, c'est un segment de ligne, joignant les points (1,0) et (0,1). Pour n=3, il s'agit d'un triangle, joignant les vecteurs (1,0,0) (0,1,0), et (0,0,1). Il est parfois appelé un *n-simplexe*,

annoté par Sn (remarquez que sa dimension est n-1). Le simplexe ouvert exclut les axes : {x dans Sn: x > 0}.

Variable d'écart

Dans une contrainte d'inégalité de forme g(x) ≤ b, l'écart est de b-g(x), qui est désignée par la variable d'écart, s. Alors, la contrainte originale est équivalente à l'équation définie g(x) + s = b, plus s >= 0.

Variable d'écart

C'est une variable ajoutée à un problème pour éliminer les contraintes "plus petit que ».

Problème de maximisation standard

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire qui satisfait toutes les conditions suivantes **:**

1) La fonction économique doit être maximisée.
2) Toutes les inégalités sont du type "plus petit ou égal".
3) Toutes les constantes du côté droit sont non négatives.
4) Toutes les variables sont non négatives.

Problème non standard

Il s'agit simplement d'un problème qui n'est pas standard et donc ne satisfait pas au moins une des quatre conditions énumérées plus haut.

Variable de surplus

Une variable ajoutée à un problème pour éliminer les contraintes "plus grand que".

Tableau

Une forme de coefficient d'un système d'équations qui peut changer de x +Ay = b à x'+A'y' = b'. Les nombres premiers montrent les changements causés par la multiplication de la première équation par l'inverse de la base (une séquence de pivots dans la méthode simplexe).

Solution non limitée

Pour certains programmes linéaires, il est possible de choisir un objectif (fonction économique) arbitrairement petit (non fini). Un tel programme linéaire est dit avoir une solution non limitée.

XII. Liste des lectures obligatoires

Linear Programming: Foundations and Extensions par Robert J. Vanderbei

www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf

Tous les étudiants doivent obligatoirement lire ce manuel à chaque début de section ou à chaque activité. Tous les autres liens sont mis à la disposition de l'étudiant pour appuyer l'apprentissage de la programmation linéaire.

XIII. Liste des supports multimédias

Ressources

Lecture 1: Wolfram MathWorld *(site visité le 03/11/06)*

Référence complète : http://mathworld.wolfram.com

Résumé : Wolfram MathWorld est une encyclopédie spécialisée en mathématique en ligne.

Motivation : Ce lien procure les références les plus détaillées sur une vaste variété de sujets touchant les mathématiques. Les étudiants devraient commencer en utilisant la fonction de recherche pour le titre du module. Ils trouveront alors un article portant sur la programmation linéaire très important. À tous moments, les étudiants devraient utiliser la fonction de recherche pour les mots-clés afin de mieux les comprendre. L'entrée trouvée devrait être étudiée avec attention.

Lecture 2 : Wikipedia (site visité le 03/11/06)

Référence complète : http://en.wikipedia.org/wiki

Résumé : Wikipedia est une encyclopédie en ligne. Elle est écrite par les visiteurs du site. Elle est extrêmement à jour puisque les entrées sont révisées continuellement. De plus, elle procure des renseignements très justes. Les entrées touchant les mathématiques sont très détaillées.

Motivation : Les étudiants devraient utiliser Wikipédia de la même manière que MathWorld. Cependant, les entrées sont parfois plus courtes et plus faciles d'approche dans un premier temps. Les entrées ne sont pas très détaillées.

Lecture 3 : MacTutor History of Mathematics (site visité le 03/11/06)

Référence compléte : http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Indexes

Résumé : Le MacTutor Archive est le site le plus complet sur l'histoire des mathématiques sur le Web. Les ressources sont organisées par personnages historiques et par thèmes.

Motivation : Les étudiants doivent chercher sur le site MacTutor Archive pour les mots-clés pour les sujets sous étude (ou par le titre du module). Il est important d'avoir une vue d'ensemble de l'origine des mathématiques étudiées et de pouvoir les situer dans l'histoire des mathématiques. Lorsque les étudiants complètent le cours et enseignent les mathématiques au secondaire, les personnages historiques des mathématiques procurent un aspect vivant à des concepts parfois abstraits pour les jeunes étudiants. En particulier, le rôle des femmes dans l'histoire des mathématiques devrait être vu afin d'amener les étudiants à réfléchir sur les difficultés rencontrées par les femmes malgré leur contribution importante. Aussi, le rôle du continent africain doit aussi être étudié afin de pouvoir partager les avancées africaines en matière de mathématiques (notamment pour les outils pour compter « les os Ishango » et le rôle des mathématiques égyptiennes.

Les sites suivants vous permettront de mettre en pratique les pivots dans les problèmes de programmation linéaire et sans avoir à faire les calculs!

1. Pivot Tool: http://www.sor.princeton.edu/~rvdb/JAVA/pivot/advanced.html
2. TUTOR: http://www.tutor.ms.unimelb.edu.au/
3. The Simplex Place: http://www.ifors.org/tutorial
4. Simplex Machine: http://www.ms.unimelb.edu.au/~moshe/lp/simplex7.html
5. linear programming-Explorer: http://www.maths.ed.ac.uk/linear programming-Explorer
6. Taha, H. (2003, 7th ed). TORA Solver: Operation Research: An Introduction

XIV. Liste des liens utiles

- **Linear Programming Formulation**
  http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpmore.html
- **Linear Programming Formulation**
  http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpmore.html
  (Site visité le 15/02/07)
- **Linear Programming Formulation**

http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/partVIII.htm
(Site visité le 15/02/07)

- **An Introduction to Linear Programming and the Simplex Algorithm by Spyros Reveliotis** http://www2.isye.gatech.edu/~spyros/linear programming/linearprogramming.html
  (Site visité le 14/02/07)

  (1) Linear Programming
  http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/rpcotdp#rpcotdp
  (Site visité le 21/02/07)

  (2) Linear Programming Formulation
  www.people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/lp.html
- **Linear Programming: A Geometric Approach page 171-176**
  http://www.wiley.com/college/sc/sullivan/CH03.pdf
- **Optimality Conditions for Constrained Optimization**
  http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Sloan-school-of-Management/15-084JSpring2004/7240EF84-B20D-419F-B1C0-2DAF3277F5C4/0/lec6_constr_opt.pdf
  (Site visité le 15/02/07)
- **Mathematical approach of checking conditions of optimality Optimality Conditions**
  http://www.math.mtu.edu/%7Emsgocken/ma5630spring2003/lectures/lag1/lag1/node1.html
  (Site visté le 16-02-07)
- **Alternate Optimal Solutions, Degeneracy, Unboudedness, Infeasibility**
  http://mat.gsia.cmu.edu/QUANT/notes/node63.html#SECTION00830000000000000000

  La dégénérescence et le concept de non-limitation y sont bien expliqués avec des exemples simples.
- **The Fundamental Theorem of Linear Programming**
  http://www.it.uu.se/edu/course/homepage/opt1/ht06/Lectures/fundamentat_thm2up.pdf

- http://engr.smu.edu/~barr/ip/ch1/node7.html
- http://www.maths.abdn.ac.uk/~igc/tch/mx3503/notes/node67.htm

  Ces liens donnent les théorèmes de la programmation linéaire et les preuves applicables.
- **Simplex Method - Big M**
  http://www.math.uwo.ca/~heinicke/courses/236_03/bigM.pdf
  (Site visité le 15/02/07)
- **Simplex Method – Big M**
  http://www.computing.dcu.ie/~lkillen/teach/CA427Simplexbigmexample.pdf
  (Site visité le 15/02/07)
  L'algorithme de la méthode du Grand M y est démontré.
- **Dual Problem: Construction and Its Meaning**
  http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/rpcotdp#rpcotdp

  Ce lien amène l'étudiant à la construction d'un problème de dualité, étape par étape.

  L'association entre le problème primaire et le problème dual y est très bien illustré avec des exemples intéressants.
- **Sensitivity Analysis for Linear Programming**
  http://mat.gsia.cmu.edu/QUANT/notes/node64.html

  (Site visité le 20/02/07)

  Ce site donne une bonne explication de la raison d'être de l'analyse de sensibilité.
- **Deterministic Modeling:Linear Optimization with Applications**
  http://www.mirrorservice.org/sites/home.ubalt.edu/ntsbarsh/Businessstat/opre/partVIII.html

  Ce site explique la structure d'un problème de programmation linéaire de la formulation à l'analyse de sensibilité. Un problème est décrit, de la formulation initiale jusqu'à l'analyse de sensibilité finale. Les étudiants sont encouragés à visiter ce lien dès qu'ils rencontrent des difficultés de compréhension des termes et des processus inhérents à la programmation linéaire.
- **Duality in Linear Programming**
  http://www.web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-04.pdf

  Ce site explique le théorème de la dualité et de ces propriétés.
- **Solution de base**
  http://engr.smu.edu/~barr/ip/ch1/node6.html
- **Linear Programming: Geometric Approach**
  www.math.tamu.edu/~janice.epstein/141/notes/Ch3.pdf
  (Site visité le 16/02/07)

XV. Synthèse du module

Vous avez été présenté, par ce module, à une des sphères des mathématiques nommée la programmation linéaire qui joue un rôle prépondérant dans le champ plus vaste de la recherche opérationnelle. La recherche opérationnelle étudie des situations où une personne est intéressée à optimaliser (minimiser ou maximiser) une quantité spécifique qui est souvent encadrée par une fonction ayant plusieurs facteurs (variables). Le but recherché est souvent la prise de décision relativement à une situation sous étude. La programmation linéaire offre une technique qui permet de résoudre une série de situations problématiques de cette sorte. Pour développer une compréhension des mathématiques liées à la programmation linéaire, vous avez appris les concepts généraux suivants :

- Formulation d'un problème de programmation linéaire. (Identifier les contraintes de la situation et la fonction économique devant être optimisée et construire un système d'inéquations s'y rattachant).
- Interprétation géométrique de la solution au problème de programmation linéaire.

  (La solution optimale est située à l'un des sommets d'intersection des lignes de délimitations de la région faisable ou encore sur l'une de ces droites.).
- Les conditions d'optimalité de la fonction économique d'un problème de programmation linéaire. (Dans la procédure étape par étape pour éliminer les variables de base du tableau initial construit à partir de cette fonction économique et de ses contraintes, une indication que la solution optimale a été atteinte est, pour un problème de maximisation, que les coefficients des variables de base faisables de la fonction sont négatives, ce qui veut dire que les variables ne peuvent plus accroître la valeur de la fonction. Pour un problème de minimisation, le raisonnement est similaire).
- L'interprétation algébrique de la solution d'un problème de programmation linéaire. (Il s'agit de l'ensemble des variables qui ne sont pas de base et faisables, après que toutes les variables de base faisables ont été éliminées par la procédure étape par étape à partir de la matrice du tableau initial construit à partir de la fonction économique et de ses contraintes.
- L'analyse de sensibilité (Une solution est stable lorsque les petits changements introduits dans les variables de contraintes ne produisent pas de grands changements à la valeur de la fonction économique associée à la solution).

En résumé, ce module s'est penché sur la formulation d'un problème de programmation linéaire et de sa solution par une approche géométrique (méthode graphique) et par la méthode algébrique (la méthode du simplexe). La stabilité des solutions a été vérifiée par l'analyse de sensibilité.

Les auteurs de ce module croient que les étudiants qui ont développé une assez bonne compréhension des concepts de base et une maîtrise des compétences associées (du moins, celles spécifiées aux activités d'apprentissage du module) seront en mesure d'enseigner les concepts de base de la programmation linéaire au niveau secondaire et seront aussi en mesure de poursuivre leur apprentissage dans le domaine de la recherche opérationnelle.

XVI. Évaluation formative et cumulative

L'évaluation de l'apprentissage de ce module est divisée en deux parties : les éléments du cours (formatifs) et les éléments cumulatifs. L'élément formatif a été amené tout au long de ce module par les activités d'apprentissage, le processus d'évaluation étant effectué par l'étudiant lui-même. Ces activités représentent une auto-évaluation. Le but de cette évaluation est de donner à l'étudiant une idée du progrès qu'il a accompli au cours du module. Cette évaluation peut aussi être inscrite par l'étudiant (voir la feuille Excel de la section XVIII). L'inscription par l'étudiant de ses progrès est importante pour visualiser son profil d'apprentissage en ce qui a trait aux notions vues dans ce module et garder trace des écarts de compréhension ou des difficultés rencontrées au fur et à mesure que l'étudiant progresse dans les activités d'apprentissage. Cette auto-évaluation formative est mieux effectuée lorsqu'on utilise des catégories qualitatives telles que, pauvre, satisfaisant, bien ou très bien. Il est attendu que l'étudiant procédera à cette auto-évaluation de façon honnête puisqu'il pourrait autrement en être désavantagé.

Le deuxième élément d'évaluation est l'évaluation cumulative. Elle est accomplie par un examen formel écrit de 10 problèmes qui peuvent être complétés, en moyenne, en quatre heures. L'examen sera donné par les responsables du programme à un centre d'apprentissage désigné, où les étudiants devront se présenter en personne. Les étudiants auront besoin de papier graphique et des accessoires de dessin et d'une calculatrice scientifique ou programmable, au choix de l'étudiant. L'examen sera noté et évalué par les responsables du programme et le résultat de l'étudiant représentera la note pour la section de la compréhension et d'apprentissage cumulatif pour le matériel présenté à ce module. Les résultats obtenus seront par la suite compilés pour représenter la note finale de l'étudiant à ce module. Les questions de tests on été choisies avec une attention particulière afin de pouvoir évaluer l'étendue de la compréhension de l'étudiant des caractéristiques et particularités des problèmes standards de programmation linéaire décrites à la Section 1 du Déroulement de l'apprentissage (voir Section VII) et les compétences associées décrites à la Section 2 du Déroulement. Vous trouverez ci-après une description des questions d'examen, des objectifs d'apprentissage évalués par ces questions ainsi que les questions d'examen ci-après.

Vous trouverez la solution aux questions d'examen à la suite.

Remerciements : [Certaines questions ont été adaptées d'exercices apparaissant dans Wagner, H. M. (1975, 2nd édition). *Principles of Principles of Operations Research.*

Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall].

La **Question 1** évalue la compréhension de l'étudiant d'un problème de programmation linéaire par l'habileté avec laquelle l'étudiant formule le problème correctement (c'est-à-dire écrire le problème en langage mathématique).

Les **Questions 2 et 3** évaluent la capacité de l'étudiant d'écrire un problème en langage mathématique et de résoudre en utilisant la méthode graphique (géométrique). L'utilisation de papier graphique permet de dessiner les diagrammes de façon adéquate.

La **Question 4** évalue la capacité de l'étudiant à résoudre un problème de programmation linéaire à l'aide de la méthode du simplexe.

Les **Questions 5 et 6** évaluent la capacité de l'étudiant à résoudre un problème de programmation linéaire à l'aide de la méthode du Grand M suivie de la méthode du simplexe. L'étudiant doit savoir à quel moment il est utile d'appliquer la méthode du Grand M.

Question 7 vérifie si l'étudiant peut identifier une forme primaire et une forme duale dans un problème de programmation linéaire et formuler le dual d'un problème de programmation linéaire donné.

.

Question 8 vérifie la capacité de l'étudiant à examiner les caractéristiques de la faisabilité et des limites d'un problème de programmation linéaire.

Question 9 évalue la capacité de l'étudiant à résoudre un problème de programmation linéaire à l'aide de la méthode duale simplexe.

Question 10 évalue la capacité de l'étudiant à résoudre un problème de programmation linéaire à l'aide de la méthode du simplexe et, par la suite, exécuter une analyse de sensibilité sur la solution obtenue.

Question 1

La compagnie Vélos Mufoya produit deux modèles de vélos à la main : le vélo de montagne et le vélo de course. Mufoya désire connaître le taux de production de chaque modèle qui lui permettrait de maximiser ses profits sur la vente de ces vélos. Mufoya assume que la compagnie peut vendre tous les vélos produits. Les données tangibles de production peuvent être fournies par l'ingénieur de la compagnie. Chaque modèle est produit par une équipe différente et chaque équipe a un taux de production différent soit, 2 vélos de montagne par jour et 3 vélos de course. La production d'un vélo de chaque type demande le même temps sur la machine de finition du métal (un engorgement de la chaîne de production) et cette machine peut effectuer au maximum 4 vélos par jour, peu importe le type. Le comptable estime que les vélos de montagne produisent un profit de 15 $ par vélo et que les vélos de course produisent un profit de 10 $ par vélo. Formulez le problème de programmation linéaire.

.

Questions 2 et 3

Un fabricant d'instruments électroniques produit deux modèles de minuterie : un modèle standard et un modèle de précision qui ont respectivement une marge de profit net de 2 $ et 3 $. Ils sont similaires en termes de design et prennent approximativement le même temps à assembler. Supposons que le fabricant désire maximiser son profit net chaque jour, selon les disponibilités des ressources et du marché. Considérons que sa main d'œuvre ne peut produire plus de 50 instruments par jour. De plus, supposons que quatre pièces essentielles (a, b, c et) ont des stocks bas et qu'elles sont utilisées en différentes quantités pour chaque modèle, comme indiqué ci-dessous :

Les contraintes de l'inventaire des stocks

Pièce	Stock	Standard (x)	Précision (y)
a	220	4	2
b	160	2	4
c	370	2	10
d	300	5	6

Ce qui veut dire que la minuterie standard x utilise 4 pièces a et chacune des minuteries de précision en utilise 2. La manufacture ne peut utiliser plus de stock que ce qu'elle a en inventaire.

[A] Formuler le problème de programmation linéaire.

[B] (i) Trouver la région de faisabilité du problème de programmation linéaire à l'aide de la méthode géométrique.

(ii) Trouver la valeur du profit maximal.

Remarque : Vous devez utiliser du papier graphique pour cette question.

Question 4

À l'aide de la méthode simplexe, résolvez le problème de programmation linéaire suivant :

Maximiser $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$

Selon que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Question 5

(a) Quand doit-on utiliser la méthode du Grand M? Expliquer en details.

(b) Maximisez $3x_1 + 4x_2$

Selon que :

$2x_1 + x_2 \leq 600$

$x_1 + x_2 \leq 225$

$5x_1 + 4x_2 \leq 1000$

$x_1 + 2x_2 \geq 150$

$x_1, x_2 \geq 0$

Question 6

Maximiser $-3x_1 - 2x_2$

Selon que :

$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Question 7

(a) Expliquez ce que l'on entend par un primaire et un dual dans le contexte d'un problème de programmation linéaire.

(b) Formulez le dual du problème de programmation linéaire suivant :

Maximiser 4x1 +5x2 +9x3 +11x4

Selon que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Question 8

Trouvez la faisabilité du problème suivant :

a) Maximiser $5x_1 + 4x_2$

Selon que

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$-2x_1 - 2x_2 \leq -9$$
$$x_1, x_2 \leq 0.$$

b) Déterminer les limites du problème suivant :

Maximiser $x_1 - 4x_2$

Selon que :

$-2x_1 + x_2 \leq -1$

$-x_1 - 2x_2 \leq -2$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Question 9

Minimiser $2x_1 + x_3$

Selon que :

$x_1 + x_2 - x_3 \geq 5$

$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Question 10

Selon le problème de programmation linéaire suivant :

Maximiser $z = 15x_1 + 10x_2$

Selon que

$x_1 \leq 2$

$x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 4$

La solution optimale est $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 50$

Supposons que la troisième contrainte est modifiée pour $x_1 + x_2 \leq 3$. Le nouveau problème devient donc:

Maximiser $z = 15x_1 + 10x_2$

Selon que :

$x_1 \leq 2$

$x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 3$

Trouvez si la solution du problème de programmation linéaire est ou n'est pas sensible au changement effectué à la contrainte.

Solutions aux questions

Question 1

La première étape est d'identifier les variables. Il s'agit des valeurs que vous pouvez mettre ou contrôler. Les variables sont les taux de production des vélos de montagne

x1 et les vélos de course, x2 .

La fonction économique est la suivante:

Maximiser le profit du jour, c'est-à-dire maximiser z = 15x1 +10x2 (en $ par jour)

Les contraintes sont les suivantes:

Limite de production des vélos de montagne $x_1 \leq 2$ (vélos par jour)

Limite de production des vélos de course $x_2 \leq 3$ (vélos par jour)

Limite de production de la machine à finition pour le métal $x_1 + x_2 \leq 4$ (vélos par jour)

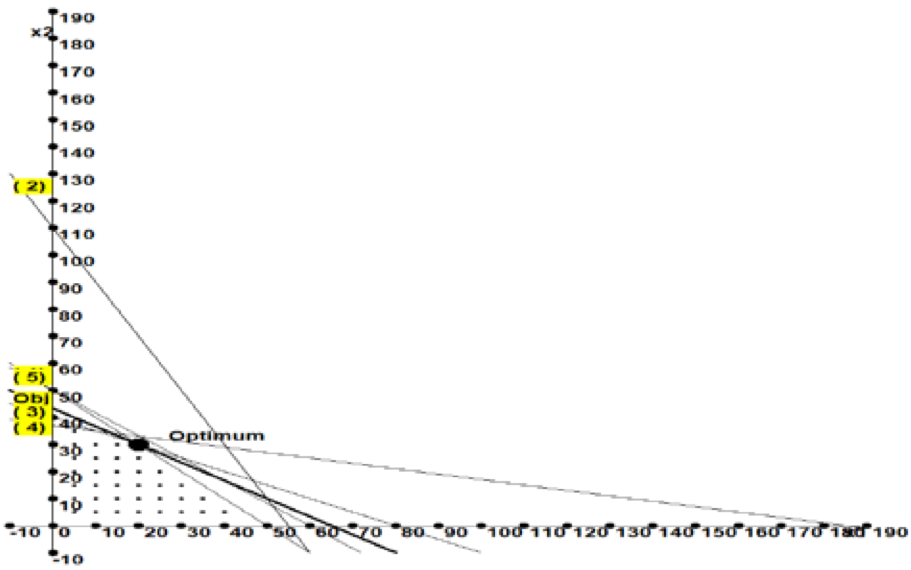
Questions 2 et 3

[A] Maximiser $2x + 3y$

Selon que:

$$\begin{aligned} x + y &\le 50 \\ 4x + 2y &\le 220 \\ 2x + 4y &\le 160 \\ 2x + 10y &\le 370 \\ 5x + 6y &\le 300 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

[B] Dessin:



Sommaire de la solution maximale

Valeur objective = 130

x = 20,00

y = 30,00

Question 4

Si x0 est la valeur de la fonction économique, ajoutez les variables d'écart x5 , x6 , x7 aux contraintes afin d'obtenir une égalité.

Vous pouvez écrire le système d'équations comme suit :

$$x_0 - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100$$

Après avoir fait 4 itérations de la méthode simplexe, vous arrivez à une étape où les variables qui ne sont pas de base x2 , x4 , x5 ou x7 ne peuvent qu'avoir une valeur 0.

Nous avons donc:

$$x_0 = \frac{695}{7} - \frac{3}{7}x_2 - \frac{11}{7}x_4 - \frac{13}{7}x_5 - \frac{5}{7}x_7$$

Question 5

Forme standard:

Maximiser $3x_1 + 4x_2$

Selon que :

$$2x_1 + 3x_2 + s_1 = 600$$
$$x_1 + x_2 + s_2 = 225$$
$$5x_1 + 4x_2 + s_3 = 1000$$
$$x_1 + 2x_2 - s_4 = 150$$

$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , s_3 , s_4 \geq 0$

Il ne s'agit pas de la forme canonique, puisqu'il n'y a pas de variable de base dans la quatrième équation. En conséquence, nous ajoutons une variable artificielle à cette équation (r_1) et lui donnons un large coefficient **négatif** dans la fonction économique, pour la défavoriser :

Maximiser $3x_1 + 4x_2$

Selon que:

$2x_1 + x_2 + s_1 = 600$

$x_1 + x_2 + s_2 = 225$

$5x_1 + 4x_2 + s_3 = 1000$

$x_1 + 2x_2 - s_4 + r_1 = 150$

$x_1 + 2x_2 - s_4 + r_1 = 150$

x_1	x_2	s_4	s_1	s_2	s_3	r_1	B	
Z	-3	-4	0	0	0	0	+M	
s_1	2	3	0	1	0	0	0	600
s_2	1	1	0	0	1	0	0	225
s_3	5	4	0	0	0	1	0	1000
r_1	1	2	-1	0	0	0	1	150

Par en forme canonique en raison des entrées +M entrée sur la rangée Z pour une variable de base (r_1). Pivotez pour replacer +M sur la rangée Z par zéro – rangée Z– rangée M*r_1

	x_1	x_2	s_4	s_1	s_2	s_3	r_1	B
Z	(-3 -M)	(-4 -2 M)	0	0	0	0	0	-150M
s_1	2	3	0	1	0	0	0	600
s_2	1	1	0	0	1	0	0	225
s_3	5	4	0	0	0	1	0	1000
r_1	1	2	-1	0	0	0	1	150

x_1	x_2	s_4	s_1	s_2	s_3	r_1	b	
Z	-1	0	-2	0	0	0	M	800
s_1	½	0	3/2	1	0	0	-3/2	375
s_2	½	0	½	0	1	0	-½	150
s_3	3	0	2	0	0	1	-2	700
x_2	½	1	½	0	0	0	½	75

x_1	x_2	s_4	s_1	s_2	s_3	r_1	b	
Z	-1/3	0	0	4/3	0	0	M	800
s_4	1/3	0	1	2/3	0	0	-1	250
s_2	1/3	0	0	-1/3	1	0	0	25
s_3	7/3	0	0	-4/3	0	1	0	200
x_2	2/3	1	0	1/3	0	0	0	200

x_1	x_2	s_4	s_1	s_2	s_3	r_1	b	
Z	0	0	0	1	1	0	M	825
s_4	0	0	1	1	-1	0	-1	225
x_1	1	0	0	-1	3	0	0	75
s_3	0	0	0	1	-7	1	0	25
x_2	0	1	0	1	-2	0	0	250

Tableau optimal : Solution $x_1^* = 75$ $x_2^* = 150$ $Z^* = 825$

Question 6

Après avoir ajouté une variable de surplus x3 dans l'inégalité ci-haut, vous pouvez écrire le modèle comme étant :

$x_0 + 3x_1 + 2x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = 10$

$x_1 + x_3 = 4$

Ensuite, introduisez des variables artificielles y1 et y2 , et laissez M =10, ce qui donne :

$x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 10y_1 + 10y_2 = 0$

$x1 + x_2 + y_1 = 10$

$x_1 + x_3 + y_2 = 4$

Pour commencer l'algorithme simplexe, vous devez soustraire (M =10) fois la rangée 2 et (M =10) fois la range 3 de la rangée 1 pour éliminer y_1 et y_2 :

$x_0 + 17x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 140$

$x_1 + x_2 + y_1 = 10$

$x_1 + x_3 + y_2 = 4$

La solution optimale est $x_1 = 4$ et $x_2 = 6$

Question 7

Minimiser $15y_1 + 120y_2 + 100y_3$

Selon que :

$$y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 4$$
$$y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq 5$$
$$y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 9$$
$$y_1 + 2y_2 + 15y_3 \geq 11$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Question 8

a) Le deuxième contrainte implique que, $x_1 + x_2 \geq 4.5$, ce qui contredit la première contrainte. Si un problème n'a pas de solution possible, alors le problème lui-même est appelé infaisable.

b) Ici, si nous mettons x_2 à zéro et que x_1 est un nombre arbitrairement grand. Aussi vrai que x_1 est plus grand que 2, la solution est faisable et plus le nombre est grand, plus la fonction économique l'est aussi. Par conséquent, le problème n'a pas de limites.

Question 9

SIMPLEX TABLEAUS -- (Dual Simplex Method)

Title: Question 9

Iteration 1	x	y	z			
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Sx5	Solution
z (min)	-2.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
Sx4	-1.00	-1.00	1.00	1.00	0.00	-5.00
Sx5	-1.00	2.00	-4.00	0.00	1.00	-8.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Iteration 2	x	y	z			
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Sx5	Solution
z (min)	-1.75	-0.50	0.00	0.00	-0.25	2.00
Sx4	-1.25	-0.50	0.00	1.00	0.25	-7.00
x3	0.25	-0.50	1.00	0.00	-0.25	2.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Iteration 3	x	y	z			
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Sx5	Solution
z (min)	-0.50	0.00	0.00	-1.00	-0.50	9.00
x2	2.50	1.00	0.00	-2.00	-0.50	14.00
x3	1.50	0.00	1.00	-1.00	-0.50	9.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Question 10

Vous pouvez résoudre le problème géométriquement pour trouver la solution optimale x1 = 2, x2 =

1, z = 40. Puisque z et x2 sont modifiés lorsque le coefficient original est changé, nous pouvons affirmer que la programmation linéaire est sensible.

XVII. Références

Vanderbei R. J. (year). Linear Programming: Foundations and Extensions
www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/onlinebook.pdf

Tous les étudiants doivent lire ce livre dès le début d'une unité ou d'une activité. Tous les autres liens sont donnés afin de permettre aux étudiants de parfaire leur compréhension et leur apprentissage des problèmes de programmation linéaire.

A gentle approach to linear programming
http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po/Chapter1.pdf

J E Beasley , OR-Notes
http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/twomines

OR-NOTES procure une approche intéressante et facile à comprendre à la formulation de problèmes de programmation linéaire. Les exemples sont bien expliqués. Les étudiants sont encouragés à regarder les exemples afin d'approfondir leur technique en formation de problèmes de programmation linéaire.

Varaiya, P. Lecture notes on Optimization
http://robotics.eecs.berkeley.edu/~varaiya/papers_ps.dir/NOO.pdf
Ces notes accompagnent le manuel de référence de base.

Management Science: Linear Programming Notes
http://www.strathcona.bham.ac.uk/Pdfs1%20management%20Course%20 Ye
%202/LINEAR%20PROGRAMM%20NOTES.PDF

Ces notes touchent à la formulation de problèmes, les solutions graphiques aux problèmes de programmation linéaire et à l'analyse de sensibilité.

Spyros,R. An Introduction to Linear Programming and the Simplex Algorithm
http://www2.isye.gatech.edu/~spyros/linear programming/linear programming.Html

McCarl, B. and Spreen, T. H., 2002. DUALITY IN LINEAR PROGRAMMING.Baker, S. L. (2006) Linear Programming I: Maximization
Linear Programming: A Geometric Approach
http://www.wiley.com/college/sc/sullivan/CH03.pdf

Basic Solutions
http://engr.smu.edu/~barr/ip/ch1/node6.html
Arsham (2007)
http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/partVIII.htm)

Les références suivantes ont été utilisées par les auteurs de ce module :

Wagner, H. M. (1975, 2nd ed). *Principles of Principles of Operations Research.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Spencer, A. J. M., Parker, D. F., Berry, D. S., England, A. H., Faulkner, T. R., Green, W. A., Holden, J. T., Middelton, D., & Rogers, T. G. (1977, reprint 1981).
Engineering Mathematics. London: Van Nostrand Reinhold Co Ltd.

Koshy, T. (1979). *Finite Mathematics and Calculus (with application)*. Santa Monica, CA: Goodyear Publishing Co. Inc.

Taha, H. (2003, 7th ed). *TORA Solver: Operation Research: An Introduction*

XVIII. Structure du fichier

University Name……………………………………………

	Name	Reg Number	Gender	Pre-Assessment	Activity 1	Activity 2	Activity 3	Activity 4	Activity 5	Activity Ave	Exam	Grade
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												

Lecturer……………………………………….. Signature……………… Date…………

Coordinator……………………………. Signature……………… Date…………

XIX. Auteur principal du module

Ce module a été développé par David K. J. Mtetwa, B.Sc., M.Sc., M.Ed., D.Ph., Grad. Cert. Edu.; en collaboration avec Admire Kurira, B.Sc., M.Sc.; et Blessing Mufoya, B.Sc. (Hons), M.Sc.. Ils sont tous des éducateurs de professeurs de mathématiques situés au Département de l'Éducation des Sciences et des Mathématiques à l'Université du Zimbabwe.

Monsieur Mtetwa, D. Ph. est né et a grandi à l'est du Zimbabwe où il a complète son éducation primaire et secondaire. Après avoir obtenu son diplôme de premier cycle en Mathématiques et en Physiques à l'Université de Lesotho, Dr. Mtetwa a poursuivi avec une maîtrise en mathématiques dans une université canadienne. Par la suite, il a enseigné dans différents collèges universitaires et des écoles secondaires au Lesotho, Swaziland et Zimbabwe. Sa certification en éducation de l'enseignement a été complétée à l'Université du Zimbabwe en 1984, après quoi il traverse l'Atlantique encore, pour cette fois s'engager pour une maîtrise et un doctorat en mathématiques dans des universités de New York et Virginie aux États-Unis. Il a terminé ces études en 1991. Depuis, Dr. Mtetwa développe et enseigne des cours d'enseignement de mathématiques pour l'obtention des diplômes et des degrés à l'Université du Zimbabwe. Il a aussi supervisé plusieurs étudiants gradués et post-gradués dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. Dr. Mtetwa est un membre actif de différentes associations professionnelles, incluant la très renommée Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education (SAARMSTE) et la African Commission on Mathematics Education (AFRCME).