Matemática

Módulo 10

Equações Diferenciais

Por

George L. Ekol, BSc,MSc.

Abril 2007

C. ESTRUTURA DO MÓDULO

I. INTRODUÇÂO

1. TÍTULO DO MÓDULO

Equações Diferenciais

2. PRÉ-REQUISITOS PARA O CURSO

Cálculo: unidade 3

3. DURAÇÃO

A duração total deste módulo é de 120 horas de estudo, distribuídas da seguinte forma:

Actividade da Aprendizagem	Tema	Unidade	Duração
#1	Introdução às equações diferenciais de primeira e de segunda ordens.	1	30 horas
#2	Técnicas e instrumentos para resolver uma variedade de problemas de equações diferenciais lineares.	1	30 horas
#3	Soluções de séries de equações diferenciais lineares de segunda ordem.	2	30 horas
#4	Equações diferenciais parciais; Transformações de Laplace; Séries de Fourier e suas aplicações.	2	30 horas

4. MATERIAL

Os estudantes devem ter acesso à literatura básica especificada adiante. Necessitarão, também, de um computador para terem acesso completo à essa literatura. Mais ainda, os estudantes devem ser capazes de instalar o software wxMaxima no computador e usá-lo para a prática de conceitos algébricos.

5. LÓGICA DO MÓDULO

As equações diferenciais surgem em várias áreas da ciência e da tecnologia sempre que se relacionam algumas quantidades continuamente mutáveis, conhecidas ou formadas através de suas taxas de mudança. Por exemplo, na mecânica clássica, o movimento de um corpo é descrito pela sua posição e velocidade em variação com o tempo. As leis de Newton permitem relacionar a posição, a velocidade, a aceleração e as várias forças actuando num corpo. Esta relação pode ser expressa como uma equação diferencial para uma posição desconhecida do corpo, como uma função do tempo. Em muitos casos, a equação diferencial pode ser resolvida, de modo a conduzir à lei do movimento.

As equações diferenciais são estudadas matematicamente sob várias perspectivas diferentes, maioritariamente sob suas soluções e funções que mantêm com a equação verdadeira. Diagnósticos de doenças e o crescimento de várias populações, segundo Braun M. (1978), são alguns exemplos ilustrativos de onde as equações diferenciais têm sido usadas para resolver problemas da vida real. As equações diferenciais de primeira ordem e de ordem superior são também aplicadas em vários problemas de mecânica, circuítos eléctricos, Geometria, Biologia, Química, Economia, Engenharia e Ciência dos mísseis, Spiegel, M.R. (1981,pp.70-162).O estudo das equações diferenciais deve, portanto, equipar os professores de Matemática e de Ciências com conhecimentos e habilidades para ensinarem bem as suas respectivas disciplinas, incorporando aplicações relevantes nas áreas das suas disciplinas.

II. CONTEÚDO

6. Perspectiva Geral

Descrição

Este módulo é constituído por duas unidades, nomeadamente:

1. Introdução às equações diferenciais ordinárias;
2. Equações diferenciais de ordem superior.

Na unidade 1, ambas equações diferenciais, ordinárias homogéneas e não – homogéneas, são discutidas e as suas soluções são obtidas através de uma variedade de técnicas. Algumas dessas técnicas incluem a variação de parâmetros, o método dos coeficientes indeterminados e os operadores inversos. Na unidade 2 são discutidas várias soluções de séries de equações diferenciais. São também discutidas equações diferenciais parciais e suas soluções através da separação de variáveis. Outros tópicos discutidos são as transformadas de Laplace, as séries e as transformações de Fourier e suas aplicações.

Esboço: Sílabos

Unidade 1: Introdução às equações diferenciais ordinárias

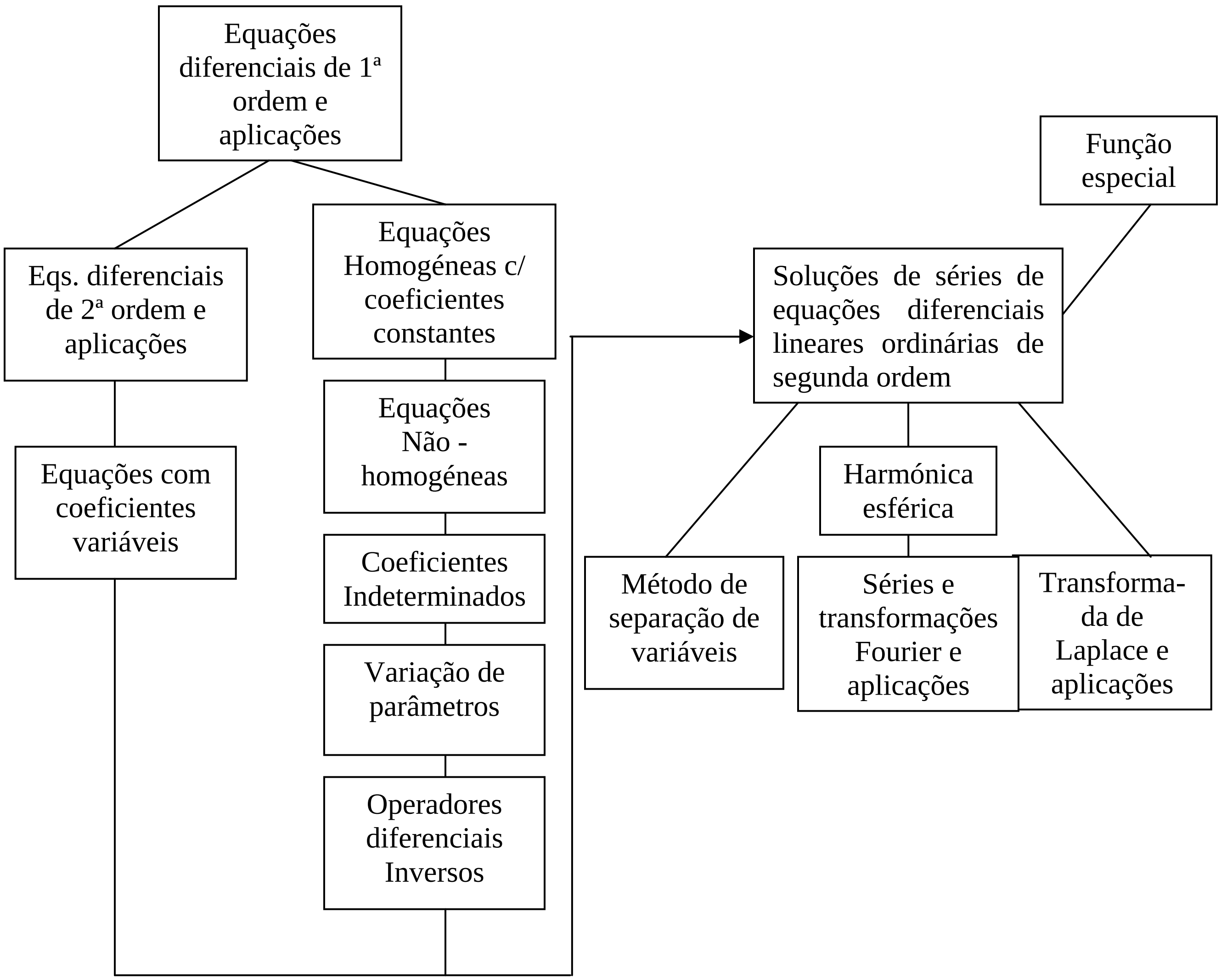
Nível 2.
Prioridade A: Cálculo 3 é pré-requisito.

Equações diferenciais e aplicações. Equações diferenciais homogéneas de segunda ordem. Equações homogéneas com coeficientes constantes. Equações com coeficientes variáveis. Equações Não - homogéneas. Coeficientes indeterminados. Variação de parâmetros. Operadores diferenciais inversos.

Unidade 2: Equações Diferenciais de Ordem Superior e Aplicações

Nível 2.
Prioridade B: Equações Diferenciais 1 é pré-requisito.
Soluções de Séries de segunda ordem, Equações diferenciais lineares. Funções especiais. Métodos de separação de variáveis aplicadas às equações diferencias. Harmónica esférica. As transformadas de Laplace e aplicações. Série de Fourier, transformações de Fourier e aplicações.

Diagrama



7. Objectivo(s) gerais do módulo

No fim deste módulo, o estudante deve ser capaz de:

1. Demonstrar compreensão sobre equações diferenciais e dominar as diferentes técnicas para aplicá-las na solução de problemas da vida real;
2. Demonstrar compreensão sobre conceitos e propriedades de funções especiais – Transformada de Laplace, Séries e Transformações de Fourier – e dominar as suas aplicações;
3. Explorar as oportunidades das TICs, em geral, e os sistemas informáticos de Álgebra (CAS), em particular, e explorar a álgebra e as soluções de equações diferenciais.

8. Objectivos específicos da aprendizagem (Objectivos Instrucionais separados por unidades):

O estudante deve ser capaz de:

1. Demonstrar compreensão sobre equações diferenciais e dominar as diferentes técnicas para aplicá-las na solução dos problemas.
2. Demonstrar compreensão de conceitos e propriedades de funções especiais, Transformada de Laplace, séries de Fourier, Transformações de Fourier e dominar as suas aplicações.

O estudante deve assegurar os conhecimentos de matemática em:

1. Cálculos Básicos: diferenciação e integração.

O estudante deve explorar as TICs e oportunidades em:

1. Uso de sistemas informáticos de Álgebra (CAS) para explorar a álgebra das equações diferenciais.

III. ACTIVIDADES DE ENSINO E APRENDIZAGEM

9. PRÉ-AVALIACÃO
QUESTÕES

1. Quais das equações trigonométricas abaixo não são identicamente verdadeiras?
   A. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
   B. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
   C. $\tan(-x) = \tan x$
   D. $\cos(-x) = \cos x$
2. Qual é a equação da tangente à curva $y = x^2 - 3$ no ponto $(2,1)$?
   A. $y = 2x - 3$
   B. $y = 4x - 7$
   C. $y = 4x - 9$
   D. $y = 4x - 5$
3. Se $y = tgx$, então $\dfrac{dy}{dx}$ e?
   A. $\cot g^2 x$
   B. $\sec^2 x$
   C. $\sec^2 xtgx$
   D. $\cos ecx$
4. Calcule a derivada de $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ em relação a x.
   A. $\frac{1}{4}e^{2x}$
   B. e^x
   C. $\frac{1}{4}e^x$
   D. e^{2x}
5. A função $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ é a forma padrão da série de Taylor para:
   A. $\sin x$
   B. $\cos x$
   C. $\sin(-x)$
   D. $\cos(-x)$

6. Para determinar a derivada da função $y = x \sin x$, o princípio básico aplicado é:
   A. Trigonometria
   B. Regra do quociente
   C. Regra de funções Paramétricas
   D. Regra do produto

7. Por vezes, a integração é descrita como ______________da diferenciação.
(Preencha o espaço em branco com a palavra apropriada)

A. processo;
B. inversa;
C. extremo;
D. resultado.

8. Para determinar a solução de $\int e^{2x} \sin x dx$, a forma mais comum é aplicar:

A. integração directa;
B. método de substituição;
C. fracções parciais;
D. integração por partes.

9. Transforme $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ em fracções parciais

A. $x + \frac{1}{x-1}$;
B. $x - \frac{1}{x-1}$;
C. $x + \frac{1}{x+1}$;
D. $x - \frac{1}{x+1}$.

10. Calcule o integral de $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

A. $\frac{x^2}{2} + \ln(x-1) + c$
B. $\frac{x^2}{2} - \ln(x-1) + c$
C. $\frac{x^2}{2} - \ln(x+1) + c$
D. $\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) + c$

CHAVE DE RESPOSTAS

1. C	2. B	3. B	4. D.	5. A
6. D	7. B	8. D	9. C	10. D

COMENTÁRIOS PEDAGÓGICOS PARA OS APRENDENTES

1. As identidades trigonométricas encontram-se em vários textos de Matemática Básica. Deve prestar atenção e anotar estas identidades.
2. Em geral, o problema de determinar a tangente num ponto P resume-se ao problema de determinar a inclinação da tangente no ponto P. Veja a unidade 1 do módulo 3.
3. Derivadas de funções trigonométricas são expressões padronizadas disponíveis nos textos básicos de Matemática. Em alguns casos, essas derivadas surgem de regras básicas. Por favor veja também a unidade 1 do módulo 3.
4. Por favor veja a unidade 1 do módulo 3.
5. Por favor veja a unidade 3 do módulo 3.
6. Por favor veja a unidade 2 do módulo 3.
7. Por favor veja a unidade 2 do módulo 3.
8. Por favor veja a unidade 2 do módulo 3 .
9. Por favor veja a unidade 2 do módulo 3.
10. Por favor veja a unidade 2 do módulo 3.

10. ACTIVIDADES DE APRENDIZAGEM

ACTIVIDADE DA APRENDIZAGEM #1

Introdução às equações diferenciais de primeira e de segunda ordem

Objectivos específicos da aprendizagem

No fim desta unidade, o estudante deve ser capaz de:

- Identificar correctamente as ordens e os graus das equações diferenciais;
- Formar uma equação diferencial pela eliminação de constantes arbitrárias;
- Resolver problemas de equações diferenciais de primeira ordem usando o método de separação de variáveis; e
- Resolver problemas de equações diferenciais homogéneas de primeira ordem, pela redução das variáveis separáveis.

Resumo

Esta unidade introduz o módulo de equações diferenciais. Supõe-se que os conhecimentos e habilidades em cálculos, diferencial e integral, foram estudados no módulo de cálculo. Desta forma, nesta unidade, o estudante vai aprender como identificar equações diferenciais correctamente, enunciando a sua ordem e o seu grau. Aprenderá também, a formar uma equação diferencial com base numa função. Resolverá problemas de equações diferenciais pelo método de separação de variáveis. E, finalmente, aprenderá a resolver equações diferenciais homogéneas pelo método de redução de variáveis separáveis.

Leitura Obrigatória:

Mauch, S. (2004).*Introduction to Methods of Applied Differential Equations or Advanced Mathematics Methods for Scientists and Engineers*: Mauch Publishing Company.
http://www.its.caltech.edu/~sean

Leitura Geral Adicional:

Stephenson, G. (1973). Mathematical Methods for Science Students. Singapore: Longman. P.380-386.
Wikibooks, *Differential Equations*

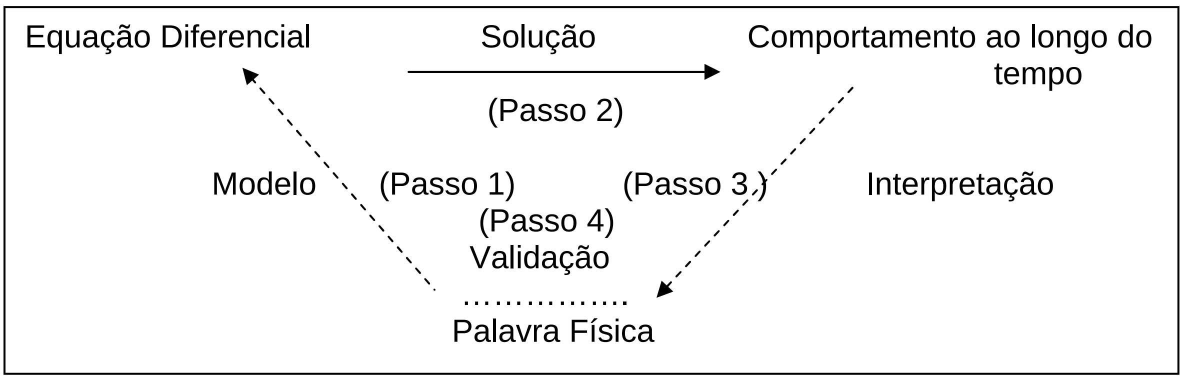
Palavras-chave

Equação diferencial: Uma equação diferencial é a relação entre uma função e suas derivadas.
Ordem: A ordem de uma equação diferencial é um número inteiro que mostra a derivada de maior ordem numa dada equação.
Grau: O grau de uma equação diferencial ordinária é a potência da derivada de maior ordem.

1. Actividade de Aprendizagem: Introdução às equações diferenciais de primeira e de segunda ordem

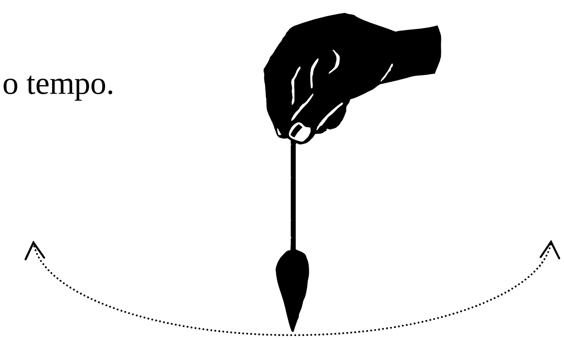
1.1 Equações Diferenciais

Uma equação diferencial é uma relação entre uma função e suas derivadas. As equações diferenciais formam uma linguagem, na qual são expressas as leis básicas da Física.
A ciência diz-nos como é que um sistema físico muda de um instante para o instante seguinte. A teoria das equações diferenciais fornece os instrumentos e as técnicas para, a partir desta informação de curta duração, obtermos o comportamento de longa duração de todo o sistema.
Os passos da arte e da prática de equações diferenciais envolvem a seguinte sequência:



Um sistema dinâmico físico.

Este pêndulo ilustra como é que um sistema físico muda com o tempo.



1.1.1 Definição: Equações diferenciais ordinárias e parciais
Uma equação diferencial (ED) é uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida com uma ou mais variáveis. Quando a função desconhecida depende somente de uma única variável, a equação denomina-se equação diferencial ordinária (EDO). Quando a função desconhecida depende de mais de uma variável, a equação denomina-se equação diferencial parcial (EDP).

Exemplo 1: $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ ou $y^{/} = 2x + y$ é uma equação diferencial ordinária, dado que a função $y = f(x)$ depende somente da variável x. Na função $y = f(x)$, x é a variável independente, e y é a variável dependente.

Exemplo 2: $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + z$ é uma equação diferencial parcial, dado que a função $y = f(x, z)$ depende de duas variáveis x e z.

1.1.2 Definição: Ordem e grau de uma equação diferencial
A ordem de uma ED é a ordem da derivada de maior ordem envolvida na expressão. O grau de uma equação diferencial ordinária é o grau algébrico da derivada de ordem maior.

Exemplo 3: $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ é uma ED ordinária de primeira ordem e de primeiro grau.

Exemplo 4: $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + z$ é uma ED parcial de primeira ordem e de primeiro grau.

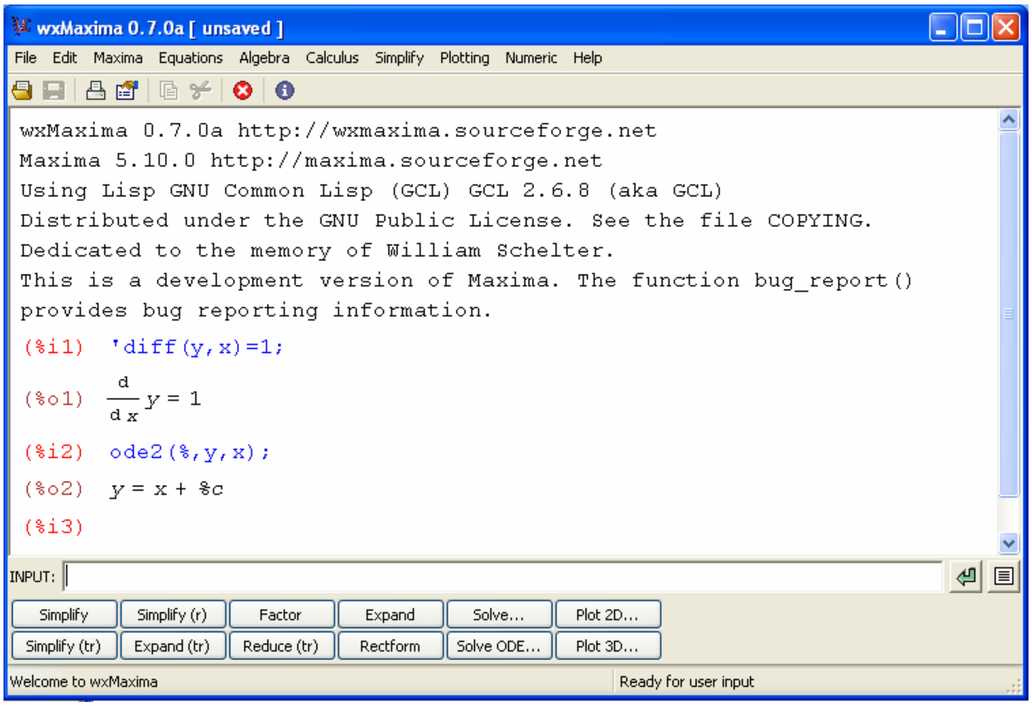
Exemplo 5: $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{\partial t} - 15x = 0$ é uma ED ordinária de segunda ordem e de primeiro grau.

Actividade 1.1.1

Actividade de Software**:** Investigar uma ED simples usando wxMaxima.
O wxMaxima pode resolver equações diferenciais para si. Este sistema não deve substituir a resolução das perguntas. Ele deve ser usado para explorar as diferentes equações e ajudar a pensar na forma como elas funcionam.

- Primeiro carregue o wxMaxima.
- Escreva sobre a linha de comando, no fim do ecrã.
- Escreva ‘diff(y,x) e pressione ENTER. Atenção ao apostrofe **‘** no inicio.
- Isto introduz $\frac{d}{dx}y$ i.e. $\frac{dy}{dx}$.
- Agora introduza a ED, começando por uma simples : $\frac{dy}{dx} = 1$. Primeiro pense: Qual é a solução?
- Se o diferencial é 1, então a função tem de ser *x*. Com uma constante arbitrária adicionada i.e. *x* + C
- Em wxMaxima, escreva: ‘diff(y,x)=1 e pressione ENTER.
- Deve observar a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 1$.
- Agora peça a wxMaxima para resolver-lhe a equação.
- Para isso, use a função **ode2**. Ela serve para equações diferenciais ordinárias (até ao segundo grau).

- Precisa de usar a wxMaxima para três coisas: 1. qual é a função que está a usar; 2. qual é a variável dependente; e 3. qual é a variável independente.
- A função é aquela que introduziu e usa-se % para wxMaxima. As variáveis são: independente: *y* e dependente: *x*.
- Então, escreva: ode2(%,y,x) e pressione ENTER.
- A solução é $y = x + \%C$
- Note que wxMaxima mostra que a constante de integração arbitrária é dada como %C.
- [Pode fazer tudo isso de uma só vez, escrevendo: ode2(‘diff(y,x)=1,y,x)]



Agora deve exercitar com equações diferenciais diferentes. Decida, sempre, qual deve ser a resposta **antes** de pressionar ENTER em wxMaxima!
Para começar, tente a seguinte equação:

$$\frac{dy}{dx} = 5, \quad \frac{dy}{dx} = x, \quad \frac{dy}{dx} = \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = x^2 + 5x$$

[Recorde-se que x^2 introduz-se como x^2 e sen *x* deve ser introduzido como sin(x).]

***Leitura Obrigatória**: Mauch*, S. (2004). Pp.773-776. Disponível em **CD .**
Usando as notas de leitura obrigatória e as notas dadas na secção 1.4, discuta em pequenos grupos de 3-4 membros, a **ordem** e o **grau** das equações diferenciais que se seguem.
No caso em que o grau da equação diferencial é dada em fracções, adverte-se que se racionalize a fracção primeiro, multiplicando pelo menor denominador comum. Note, por favor, que o grau da equação diferencial é obtido através do mesmo termo que atribui a maior ordem numa dada equação.

(i) $x^2 dy + y dx = 0$

(ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 3x^2 - 1$

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x - \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}$

(iv) $\left(\frac{d^3y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + y = e^x$

1.2. Formação de uma equação diferencial

Embora o primeiro problema no estudo de uma equação diferencial seja determinar a solução de uma dada equação diferencial, o problema inverso é igualmente interessante. Isto é, o problema para determinar uma equação diferencial que se verifica numa dada solução resolve-se pela diferenciação repetida e pela eliminação de constantes arbitrárias.

Exemplo: Determine a ED que tem $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + 3x$ como sua solução geral.
Solução: Diferencie a expressão dada duas vezes.

(1) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + 3x$

(2) $y' = c_1e^x - c_2e^{-x} + 3$

(3) $y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}$

Elimine c_1 e c_2 subtraindo (3) de (1) para obter $y - y'' = 3x$ que dá a equação diferencial desejada. Note que a equação diferencial desejada é livre de constantes arbitrárias.

Actividade 1.2.1

Determine a ED com soluções gerais seguintes:
Sugestão: Use o Exemplo da secção 1.2.

1. $y^2 = 4c(x + c)$, c é uma constante arbitrária. [Sol: $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$]
2. $y = Ae^{-x} + Be^{-3x}$, A e B são constantes arbitrárias. [Sol: $y'' - 4y' + 3y = 0$]

1.3. Soluções de equações diferenciais de primeira ordem

O desenvolvimento sistemático de técnicas para a resolução de equações diferenciais, como é lógico, começa com equações de primeira ordem e do primeiro grau.

As equações deste tipo, em geral, podem ser escritas como $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, (1.3.)

onde $F(x, y)$ é uma função dada. Porém, apesar da aparente simplicidade desta equação, as soluções analíticas, no geral, somente são possíveis quando $F(x, y)$ tem formas simples. Tais formas são introduzidas nesta actividade.

1.3.1. Variáveis separáveis

***Leitura Obrigatória**:* Mauch, S. (2004).Pp.780-782 disponível em <u>**CD**</u>

Se $F(x,y) = f(x)g(y)$ (1.3.1a)
onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções somente de x e somente de y, respectivamentes.

Então, (1.3) torna-se $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (1.3.1b).

dado que as variáveis x e y estão agora separadas , obtêm-se, (1.3.1b),

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \qquad (1.3.1c).$$

que expressa y implicitamente em termos de x.

Exemplo: Resolva a equação $\frac{d\ y}{dx} = \frac{y+1}{x-1}$, (1.3.1d).

Solução: Reescrevendo (1.3.1d) na forma de (1.3.1c),

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}, \qquad (1.3.1e).$$

ou $\log_e(y+1) = \log_e(x-1) + \log_e C$ (1.3.1f)

onde C é uma constante arbitrária. Assim $\frac{y+1}{x-1} = C$, (1.3.1g)

é a solução geral.

Actividade 1.3.1
Dada a condição inicial $y = 1$ em $x = 0$.
Use a expressão para a solução geral em (1.3.1g) com vista a determinar uma solução particular.
[Solução: $y = 2(1-x) - 1)$].

1.3.2. Equações diferenciais Homogéneas

***Leitura Obrigatória**:* Mauch, S. (2004).Pp.786-791 disponível em <u>**CD**</u>
Uma expressão do *n- esimo* grau em x e y diz-se que é homogénea de grau *n*, quando x e y são substituídos por tx e ty e o resultado é uma expressão original multiplicada por t^n; simbolicamente $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

Exemplo: Mostre que $x^2 + xy - y^2$ é homogénea e determine o grau.

Solução: substitua x e y por tx e ty respectivamente, para obter
$t^2x^2 + (tx)(ty) - t^2y^2 = t^2(x^2 + xy - y^2)$. O grau é 2.
Considere a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.
Diz-se que a equação é homogénea em x e y se M e N forem funções homogéneas do mesmo grau em x e y. A técnica para resolver esta equação constitui na substituição de $y = vx$ ou $x = vy$ com base no teorema seguinte.

Teorema: Toda *a equação diferencial homogénea de primeira ordem e do primeiro grau pode ser reduzida a uma equação de variáveis separáveis pela substituição de* $y = vx$ *ou* $x = vy$.

Exemplo: Determine a solução geral da equação diferencial $2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$.

Solução: Uma simples verificação revela que a equação é homogénea (Veja o primeiro exemplo nesta secção).
Considere $y = vx$ e $dy = vdx + xdv$, e substitua a equação diferencial de forma a obter

$2x(vx)dx - (x^2 - v^2x^2)(vdx + xdv) = 0$

$x^2(v + v^3)dx + x^3(v^2 - 1)dv = 0$.

Dividindo por $x^3(v + v^3)$ separe as variáveis:

$$\frac{dx}{x} + \frac{(v^2 - 1)dv}{v(1 + v^2)} = 0$$

A integração conduzirá a

$\ln x - \ln v + \ln(v^2 + 1) = \ln c$ ou $x(v^2 + 1) = cv$

Reescrevendo as variáveis originais e substituindo $v = \dfrac{y}{x}$, obtem-se $y^2 + x^2 = cy$ como solução geral.

Actividade 1.3.2

Estudo em grupo:

Nesta actividade, os estudantes devem trabalhar em grupos de 4-5 membros. Cada membro do grupo deverá ler Mauch, S. (2004).Pp.786-791 disponível em CD. Usando a informação da literatura obrigatória, inicialmente, devem resolver o problema dado individualmente. Quando todos os membros do grupo estiverem prontos devem se reunir e discutir as suas respostas. Cada membro apresentará a sua solução em cinco minutos enquanto os outros membros tomam nota. Os membros são livres de efectuar qualquer outra pergunta que necessite de esclarecimento.

Problema: $2xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, dado $y(1) = 0$.

Sugestão: Escreva y = vx, o que implica que dy =vdx + vdx. Converta a equação resultante numa equação de primeira ordem separável em termos de v e x e resolva. A seguir, substitua v=y/x para obter a solução requerida em termos de x e y.

[solução*:* $x^2 - y^2 = x$].

Actividades Adicionais para a Unidade: Trabalho em Grupo

Estas actividades da aprendizagem devem ser usadas somente quando se tem a certeza de se ter tempo extra para trabalhá-las. Também, só as deve usar se já tiver respondido às questões anteriores de forma correcta.

Cuidados a ter em conta pelos estudantes:
Aconselha-se a não olhar para as soluções fornecidas no fim de cada exercício antes de ter registrado as suas respostas no papel.

Preencha os espaços em branco para cada uma das Equações Diferenciais após completar o exercício.

	Equação Diferencial	Ordinária ou Parcial	Ordem	Grau	Variável independente	Variável Dependente
1	$y^{/} = x^2 + 5y$					
2	$xy^{//} - 4y^{/} - 5y = e^{3x}$					
3	$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial u}{dy}$					
4	$\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = s - 3t$					

Soluções para Actividades de aprendizagem

	Equação Diferencial	**Ordinária ou parcial**	**Ordem**	**Grau**	**Variável Independente**	**Variável Dependente**
1	$y^{/} = x^2 + 5y$	Ordinária	1	1	X	Y
2	$y^{//} - 4y^{/} - 5y = e^{3x}$	Ordinária	2	1	X	Y
3	$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial u}{dy}$	Parcial	2	1	x, y, t	U
4	$\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = s - 3t$	Ordinária	3	2	T	S

Comentários Pedagógicos sobre as Soluções das actividades de aprendizagem.

Q1. Esta é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. $y^{/}$= dy/dx indica que a ordem é 1. O grau é também 1 porque $(y^{/})^1 = y^{/}$. A variável independente é x.

Q2. Esta é uma equação diferencial de segunda ordem. $y^{//} = d^2y/dx^2$ indica-nos que a ordem é 2. O grau é também 1 porque $(y^{//})^1 = y^{//}$. Novamente, a variável independente é x .

Q3. Esta é uma equação diferencial de segunda ordem. $u^{//} = d^2u/dt^2$ indica que a ordem é 2. O grau é também 1 porque $(u^{//})^1 = u^{//}$. Neste caso, as variáveis independentes são x, y, e t.

Q4. Esta é uma equação diferencial de terceira ordem. $s^{///} = d^3s/dt^3$ Indica que a ordem é 3. O grau é dado pela potência, sobre a qual a derivada de maior ordem $(s^{///})$ é elevada. Portanto, o grau é dois porque $(s^{///})^{2.}$ A variável independente é t.

Referências

Zwillinger, D (1997).*Handbook of Differential Equations*..(3rd Ed).Boston: Academic Press.

Polynin, A.D.,& Zaitsev, V.F., (2003).*Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations* (2nd Ed).Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press. ISBN 1-58488-297-2.

Johnson, W. (1913) *A Treatise on Ordinary and partial Differential Equations.*University of Michigan Historical Math Collection: John Wiley and Sons.

Wikibooks, *Differential Equations*

Ince, E.L. (1956). *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications,

Links Externos

- Lectures on differential equations MIT Open CourseWare video
- Online Notes/Differential Equations Paul Dawkins, Lamar University
- Differential Equations, S.O.S Mathematics
- Introduction to modeling via differential equations Introduction to modeling by means of differential equations, with critical remarks.
- Differential Equation Solver Java applet tool used to solve differential equations

ACTIVIDADE DA APRENDIZAGEM #2

Técnicas e instrumentos para resolver uma variedade de problemas de equações diferenciais lineares

Objectivos específicos da aprendizagem

No fim desta unidade, o estudante deve ser capaz de:

- Identificar e resolver problemas de equações diferenciais com coeficientes variáveis;
- Identificar e resolver problemas de equações diferenciais não - homogéneas;
- Aplicar o método dos coeficientes indeterminados nas equações diferenciais;
- Aplicar o método de variação de parâmetros nos problemas de equações diferenciais; e
- Aplicar o operador diferencial inverso na solução de equações diferenciais lineares.

Resumo

Nesta unidade introduz-se equações diferenciais com coeficientes variáveis, discute-se Equações não – homogéneas, Equações com coeficientes indeterminados e também o método de solução pela variação de parâmetros. Por fim, discute-se, igualmente, a técnica do inverso para a solução de equações diferenciais. Como actividades de aprendizagem, nesta unidade propõe-se o estudo independente, leitura de trabalhos, discussões em grupo, e solução de problemas.

Leitura Obrigatória (Texto nuclear):

Nesta actividade da aprendizagem, o texto de referência é Mauch, S. (2004,Capítulo 17).

Leitura Geral Adicional:

Wikibooks, *Differential Equations (inclue a pagina do web ou site especifico)*

Palavras-chave

Coeficientes variáveis: Contrariamente às equações diferenciais com coeficientes constantes, existem também equações diferenciais com coeficientes variáveis. Essencialmente, um coeficiente variável é aquele que não é constante, isto é, é expresso em forma de função.
Equações não - homogéneas: Uma equação diferencial homogénea é uma equação que tem o segundo membro igual a zero. Uma equação diferencial não- homogénea é uma equação na qual o segundo membro é diferente de zero.
Coeficientes indeterminados: Estas são constantes a serem explicitamente determinadas através da solução do integral particular de uma equação diferencial. O método usado para tal denomina-se método dos coeficientes indeterminados.
Variação de parâmetros: Este é um método usado para determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear, quando a solução geral da equação reduzida (equação homogénea) é conhecida. (Para mais detalhes, veja as notas abaixo)
Técnica Inversa: Esta técnica é aplicada na solução de equações diferenciais usando propriedades de um operador diferencial.(Veja as notas que se seguem).

2. Actividades de aprendizagem: Técnicas e instrumentos para resolver uma variedade de problemas de Equações diferenciais lineares.

2.1.1 Definição: Equações Lineares
As equações lineares de primeira ordem, já estudadas na unidade 1, são um caso especial da equação linear geral de ordem *n*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.1.1)$$

onde $a_0(x),\ a_1(x)\ ...\ a_n(x)$ e $f(x)$ constituem funções de x ou constantes.

2.1.2 Definição: Equações Homogéneas e não - homogéneas.
Considere a equação (2.1.1).Se $f(x) = 0$. Ela chama-se equação **homogénea** com variáveis ou coeficientes constantes, dependendo de $a_0(x),\ a_1(x)\ ...\ a_n(x)$ serem funções de x ou serem constantes. Também pode ser designada por equação diferencial **reduzida**

Exemplo: $x\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$, é uma equação homogénea de segunda ordem com coeficientes variáveis.

Se $f(x) \neq 0$ na equação (2.1.1), ela chamar-se-a equação não - homogénea com variáveis ou coeficientes constantes, dependendo de $a_0(x),\ a_1(x)\ ...\ a_n(x)$ serem funções de x ou de serem constantes. Exemplo: $x\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = senx$ é uma equação não - homogénea de segunda ordem com coeficientes variáveis.

Actividade 2.1.2:
Trabalho em Grupo: Trabalhe com colegas na solução destes problemas. Partilhe e discuta as suas soluções com eles.
Usando a equação (2.1.1) determine as equações diferenciais lineares com os seguintes coeficientes:

(i) $a_0 = 2x^2$, $a_1 = x$. $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $f(x) = \cos x$

(ii) $a_0 = 2x^2$, $a_1 = x$. $a_2 = 2$, $f(x) = 3x^3$

2.1.3 Definição: Solução de uma equação diferencial linear de segunda ordem.

Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções independentes da equação reduzida (2.1.1)

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \qquad (2.1.3a)$$

Então haverá uma combinação linear $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ na qual $c_1,\ c_2$ são constantes arbitrárias, o que também constitui uma solução.

Demonstração:
Substitua $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ na equação (2.1.3a), obter-se-à

$$[a_0(x)\frac{d^n y_1}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy_1}{dx}+a_n(x)y_1]+$$

$$[a_0(x)\frac{d^n y_2}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy_2}{dx}+a_n(x)y_2]\equiv 0 \qquad (2.1.3b)$$

A equação (2.1.3b) torna-se identicamente igual a zero, pois cada parêntesis é zero pelo facto de y_1 e y_2 serem soluções de (2.1.3a).

2.1.4 Generalização da definição 2.1.3 para a solução de equações diferenciais lineares.

Teorema 2.1.4a: Se $y_1, y_2, ..., y_n$ são n, funções linearmente independentes de x que satisfazem a equação homogénea (2.1.3), então haverá uma combinação linear

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n \qquad (2.1.4)$$

onde $c_1, c_2, ..., c_n$ são constantes arbitrárias e é solução. A equação (2.1.4), que constitui a solução da equação homogénea, chama-se função complementar.

Teorema 2.1.4b: A solução geral seria – uma equação diferencial não-homogénea completa é igual a soma da sua função *complementar com qualquer integral* particular. Se P é uma solução particular de (2.1.1), então a solução geral é

$$y = y_c + P = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n + P \qquad (2.1.4b)$$

Assim, para equações não - homogéneas:

Solução Geral = Função Complementar + Integral Particular

2.1.5 Aplicação do teorema 2.1.4b

A equação geral linear (2.1.4b) estudada na secção 2.1.4 é difícil de resolver, em geral, e requer técnicas especiais. Porém um caso especial e importante ocorre quando os coeficientes $a_0(x),\ a_1(x)\ ...\ a_n(x)$ são constantes, sendo a equação chamada de equação de coeficientes constantes. Considere uma equação homogénea de coeficientes constantes

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=0 \qquad (2.1.5a)$$

Denotando, $D_x^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$, na equação (2.1.5a) se terá

$$a_0 D_x^n y + a_1 D_x^{n-1} y + ... + a_{n-1} D_x y + a_n y = 0$$

$$\Rightarrow (a_0 D_x^n + a_1 D_x^{n-1} + ... + a_{n-1} D_x + a_n) y = 0. \qquad (2.1.5b)$$

Fazendo uma substituição formal $D_x = m$ em (2.1.5b), obter-se-a um polinómio em m de grau n dado:

$$g(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + ... + a_{n-1} m + a_n = 0, \qquad (2.1.5c)$$

E se se igualar a equação (2.1.5c) a zero ter-se-a uma equação algébrica de grau n que tem n raízes. A equação $g(m) = 0$ denomina-se equação **auxiliar** da equação diferencial (2.1.5c).

Teorema 2.1.5: Se m_1 é uma raiz da equação auxiliar $a_0 m_1^n + a_1 m_1^{n-1} + ... + a_{n-1} m_1 + a_n = 0$, então $y = e^{mx}$ é uma solução da equação diferencial linear homogénea.
$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n) y = 0$ onde a_i é uma constante.

Demonstração: Pela diferenciação sucessiva obter-se-a

$$y = e^{m_1 x}$$
$$y' = m_1 e^{m_1 x}$$
$$y'' = m_1^2 e^{m_1 x}$$
$$y''' = m_1^3 e^{m_1 x}$$
$$\cdots$$
$$y^{(n)} = m_1^n e^{m_1 x}$$

Substituindo estas derivadas na equação diferencial, obter-se-à

$$a_0 m_1^n e^{m_1 x} + a_1 m_1^{n-1} e^{m_1 x} + ... + a_{n-1} m_1 e^{m_1 x} + a_n e^{m_1 x} = 0$$

ou $(a_0 m_1^n + a_1 m_1^{n-1} + ... + a_{n-1} m_1 + a_n) e^{m_1 x} = 0$
e como m_1 é uma raiz da equação auxiliar, a expressão entre parêntesis é igual a zero, e a equação é resolvida.

2.1.6 Resumo da solução de uma equação diferencial homogénea.

A resolução da equação diferencial reduz-se a resolução da equação auxiliar algébrica para as n raízes e forma uma combinação linearmente independente $c_i \; e^{m_i x}$ $(i = 1,...,n)$ como solução geral, *se as raízes forem todas distintas.*

Exemplo: Determine a solução geral de $y'' - y' - 6y = 0$
Solução: A equação auxiliar e $m^2 - m - 6 = 0$
$(m - 3)(m + 2) = 0$, que tem raízes $m = 3$ ou $m = -2$. A solução é $y = c_1 \; e^{3x} + c_2 \; e^{-2x}$
O estudante deve verificar a resposta. Como é que isto pode ser feito?
Sugestão: Faça a revisão dos exercícios efectuados ao formar uma equação diferencial na actividade de aprendizagem 1.

Teorema 2.1.6
Se a equação auxiliar de uma equação diferencial linear homogénea contém r como raiz ***múltipla***, então $y = (c_0 + c_1 x + c_{2.} x^2 + ... + c_{s-1} x^{s-1})e^{rx}$ é uma solução da equação diferencial

Exemplo: Se $r = m$ (raiz dupla), a solução é $y = (c_0 + c_1 x)e^{mx}$

2.1.7 Equação auxiliar com raízes complexas
Se a equação auxiliar com coeficientes reais contém duas raízes complexas $m_1 = a + bi$ e $m_2 = a - bi$ então $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 senbx)$ é uma solução da equação diferencial e C_1, C_2, a, b são constantes.

Generalização

Se as raízes complexas são múltiplas, isto é, se ($(a \pm bi)$ é um par de raízes complexas múltiplas, então os termos correspondentes da função complementar são
$y = e^{ax}[(C_0 + C_1 x + C_{2.} x^2 + ... + C_{s-1} x^{s-1}) \cos bx + (D_0 + D_1 x + D_{2.} x^2 + ... + D_{s-1} x^{s-1}) senbx]$

Actividades de Aprendizagem 2.1.7

(i) **Leitura Individual:** Leia o capítulo 17 de Mauch, S. (2004)

(ii) **Solução de um Problema:**
Escreva a equação auxiliar para as equações diferenciais seguintes e determine a sua solução:
(a) $y^{//} + 3y^{/} + 2y = 0$ *[Solução: $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$]*
(b) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 6\frac{d\ y}{dx} + 9y = 0$ *[Solução: $y = (A + Bx)e^{3x}$].*
Sugestão: Use o Teorema 2.2.1 e o exemplo seguinte como ideia para o problema.
(c) $y^{///} - 3y^{//} + 7y^{/} - 5y = 0$
Sugestão: Use a generalização da secção 2.1.7.

(iii) Trabalho em Grupo
Discuta as suas propostas de soluções para as perguntas **(ii)** em pequenos grupos e veja se coincidem ou não com as soluções sugeridas entre parêntesis.

2.1.7 Equações de coeficientes indeterminados.

Na secção anterior aprendeu-se que a solução de uma equação diferencial linear completa é formada pela soma da função complementar com o integral particular. As técnicas para obter a função complementar y_c foram desenvolvidas nas secções 2.1.4-2.1.6 com vários exemplos. O que falta apenas é fornecer as técnicas para determinar o integral particular, de modo a se obter uma solução

completa. Nesta secção discutir-se-a as técnicas designadas por método dos coeficientes indeterminados.
Embora o método dos coeficientes indeterminados não seja aplicável em todos os casos, este pode ser usado se o segundo membro de $f(x)$, conter apenas termos com um número finito de derivadas, linearmente independentes tais como x^n, e^{mx}, $senbx$, $\cos bx$ ou produtos destas.

2.2 Procedimento para a técnica dos coeficientes indeterminados.

O procedimento geral nesta técnica é assumir o integral particular y_p de forma similar a do segundo membro de $f(x)$ na equação (2.1.1). As derivadas necessárias de y_p são obtidas e substituídas na equação diferencial fornecida. Isto resulta numa identidade para a variável independente e, consequentemente, os coeficientes dos termos semelhantes serão igualados. Os valores dos coeficientes indeterminados são determinados pelo sistema de equações lineares resultante. O procedimento é melhor ilustrado com um exemplo.

A tabela 2.2.1 abaixo simplifica a regra geral para a formulação do integral particular.

Se $f(x)$ e da forma	*Escolha para y_P*
$c_0 + c_1 x + c_{2.} x^2 + ... + c_n x^n$	$C_0 + C_1 x + C_{2.} x^2 + ... + C_n x^n$
$(c_0 + c_1 x + c_{2.} x^2 + ... + c_n x^n) e^{rx}$	$(C_0 + C_1 x + C_{2.} x^2 + ... + C_n x^n) e^{rx}$
$c_0 senbx + c_1 \cos bx$	$C_0 senbx + C_1 \cos bx$

Tabela 2.2.1

Exemplo 2.2.1: Determine o integral particular:

$$y^{//} + 3y^{/} + 2y = e^{2x}$$

Solução: Na actividade da aprendizagem da secção 2.1, trabalhou com a função complementar desta equação para ser $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$. Isto é, a equação auxiliar é $m^2 + 3m + 2 = 0$ $\Rightarrow (m+2)(m+1) = 0$, resultando $\Rightarrow m = -2$ *ou* $\Rightarrow m = -1$. Consequentemente, a função complementar é $y_c = Ae^{-x} + Be^{-2x}$, como antes.
Olhando para o segundo membro da equação diferencial acima, exemplo 2.2.1 e a regra geral na tabela 2.2.1, o integral particular é
$Y = Ae^{2x}$, $Y^{/} = 2Ae^{2x}$, $Y^{//} = 4Ae^{2x}$
Substituindo na equação original $(4A + 6A + 2A)e^{2x} = e^{2x}$

Comparando os coeficientes de ambos os membros, $12A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{12}$

A solução geral seria, então, a função complementar + o integral particular, que é

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{1}{12}$$

Actividade da Aprendizagem 2.2.1

(i) Leitura: Estude o material apresentado na secção 2.2.

(ii) Trabalho em Grupo

Use a literatura básica da secção 2.2 e desenvolva ideias sobre como trabalhar as soluções gerais das equações diferenciais que se seguem. Compare as suas soluções com as providenciadas na actividade da aprendizagem. As suas soluções estão de acordo com as providenciadas?

(a) $y'' - 5y' + 6y = x^2$ *[Solução Geral:* $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + (1/6)x^2 + (5/18)x + (9/108)$ *]*

(b) $y'' + 4y = 3\sin x$ *[Solução Geral:* $y = A\cos 2x + Bsen2x - (3/4)x\cos 2x$ *]*

2.3 Solução pelo Método de variação de parâmetros (VDP)

Nesta actividade da aprendizagem o seu texto de maior referência é Mauch, S. (2004, pp.795-796).

2.3.1 Introdução

O método dos coeficientes indeterminados estudado na secção é limitado nesta aplicação. Por necessita-se de uma outra técnica com uma vasta aplicação. A técnica estudada nesta secção é denominada método de variação de parâmetros.

2.3.2 Descrição do método

O procedimento para o VDP consiste em substituir as constantes na função complementar por funções indeterminadas, de variável independente x e, então, determinar essas funções de forma que a função complementar modificada seja substituída na equação diferencial, e $f(x)$ seja obtida no primeiro membro. Isto coloca apenas uma restrição nas n funções arbitrárias c_i , $(i = 1,...,n)$, e ter-se-a $(n-1)$ condições a disposição. Utilizamos esta liberdade de modo seguinte:

(a) Para diferenciar y_c com vista a determinar $D_x y_c = \dfrac{dy_c}{dx}$, surgirão termos que contêm $c_i'(x)$. Deve-se ajustar esta combinação de termos a zero.

(b) Como voltamos a diferenciar para encontrar $D_x^2 y_c$. Novamente igualamos a combinação de termos resultante contendo $c_i'(x)$, a zero.

(c) Continuamos com este processo através de $D_x^{n-1} y_c$

(d) Então, determina-se $D_x^n y_c$ e se substituí todos esses valores na equação diferencial dada. Como y_c é a função complementar, os resultados desta substituição somente conterão os termos de $D_x^n y_c$, os quais surgem porque as c_i são funções de x.

(e) As equações obtidas de (d) e as $(n-1)$ condições impostas por (a)-(c) conduzirão a um sistema de n equações lineares em n desconhecidas c_i', $(i = 1,...,n)$.Isto resolve-se e integra-se para conduzir as n funções $c_i(x)$.

O procedimento não é muito difícil, dado que a ordem da equação diferencial é pequena. O exemplo que se segue ilustra a técnica.

Exemplo 2.3.2:

Determine a solução geral de $y^{//} - y = x^2$ (2.3.2)

Solução: A equação auxiliar é $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$ ou $m = -1$

Tendo em conta o estudo na secção 2.2, a função complementar da equação diferencial é:

$$y_c = k_{1.}e^x + k_2 e^{-x} \qquad (2.3.2a)$$

Seja $c_i, (i = 1,2)$ uma função de x:

$$y_p = c_{1.}(x)e^x + c_2(x)e^{-x} \qquad (2.3.2b)$$

Diferencie para obter $y^/{}_p = c_{1.}e^x - c_2 e^{-x} + c_1^/ e^x + c_2^/ e^{-x}$ (2.3.2c)

Suponha que a primeira condição seja . $c_1^/ e^x + c_2^/ e^{-x} = 0$ (2.3.2d)

Com a condição (2.3.2d) suposta em (2.3.2c), diferencie novamente para obter $y_p^{//} = c_{1.}e^x + c_2 e^{-x} + c_1^/ e^x - c_2^/ e^{-x}$ (2.3.2e)

Substitua (2.3.2e) e (2.3.2b) em (2.3.2) obtendo:

$$c_{1.}e^x + c_2 e^{-x} + c_1^/ e^x - c_2^/ e^{-x} - c_{1.}e^x - c_2 e^{-x} = x^2,$$

$$\text{ou} \quad c_1^/ e^x - c_2^/ e^{-x} = x^2 \qquad (2.3.2f)$$

Note que todos os termos, excepto os que contêm as derivadas de $c_i, (i = 1,...,n)$, desaparecem e pode-se poupar tempo simplesmente considerando esta parte de (2.3.2e) igual a $f(x)$.

As equações (2.3.2d) e (2.3.2f) formam, agora, um sistema de duas equações lineares a serem simultaneamente resolvidas para $c_1{}^/$ e $c_2{}^/$. Adicionando essas duas equações obter-se-a

$$2c_1{}^/ e^x = x^2$$

ou

$$dc_1 = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}dx$$

$$c_1 = \int \frac{1}{2}x^2 e^{-x}dx$$

A Integração por partes conduzirá a

$$c_1 = -(1 + x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x}).$$

Da equação (2.3.2d), ter-se-a

$$c_2^/ = -c_1^/ e^{2x} = -\frac{1}{2}x^2 e^x$$

Integrando novamente por partes conduzirá a

$$c_2 = -(1 - x + \frac{1}{2}x^2)e^x$$

A solução geral é, então e como sempre, a soma da função complementar com o integral particular i.e. $y = k_{1.}e^x + k_2 e^{-x} + c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$

$$= k_{1.}e^x + k_2 e^{-x} + -[1 + x + (1/2)x^2] + -[1 - x + (1/2)x^2]$$

$$= k_{1.}e^x + k_2 e^{-x} \text{ - } x^2 - 2$$

Actividades da Aprendizagem 2.3

(i) Solução de problema: Aplique as técnicas do método de variação de parâmetros (VDP) discutidas na secção 2.3 nos problemas que se seguem. Note que estes problemas foram também resolvidos usando um outro método na secção 2.2:

(a) $y'' - 5y' + 6y = x^2$

(b) $y'' + 4y = 3\sin x$

Determine se VDP conduz às mesmas soluções obtidas na secção 2.2.

(ii) Trabalho em grupo
Qual dos métodos acha mais fácil aplicar nos problemas dados e porquê?

2.4. Operadores diferenciais

Introdução:

Nesta secção mostra-se a teoria sobre operadores diferenciais e discute-se a aplicação da teoria na solução das equações diferenciais lineares. Vários exemplos são fornecidos, juntamente com actividades de aprendizagem para as secções que se julga importante trabalhar antes de prosseguir para as secções seguintes.

2.4.1 Definição e Notação.

Operar significa *produzir um efeito apropriado,* e um operador é o instrumento ou o efeito que desencadeia isso. Já usamos a notação

$$D_y^k y = \frac{d^k y}{dx^k}, k = 1,2,...$$

Para indicar a derivada de ordem k da função y em relação a x. D^k denota a derivada de ordem k, em relação à variável independente apropriada. Nessa ordem, D^k é chamado operador diferencial, dado que este deve produzir um efeito ou deve operar sobre uma função e deve se comportar de acordo com as regras de diferenciação. As propriedades seguintes são validas:

Propriedade 2.4.1a. se c é uma constante, $D^k(cy) = cD^k y$

Propriedade 2. 4.1b. $D^k(y_1 + y_2) = D^k(y_1) + D^k(y_2)$

Propriedade.2.4.1c. Dois operadores A e B são iguais se e somente se $Ay = By$.

Propriedade 2.4.1d. Se a operadora A, B, e C são quaisquer operadores diferenciais, então devem satisfazer as seguintes regras ordinárias da álgebra:

1. A comutatividade da adição A+B=B+A;
2. A associatividade da adição (A+B) +C= A+ (B+C);
3. A associatividade da multiplicação (AB) C= A (BC);
4. A distributividade da multiplicação A (B+C) = AB+AC; e

5. A comutatividade da multiplicação se todos os operadores tiverem coeficientes constantes AB=BA.

Propriedade 2.4.1e. Mudança exponencial Se $P(D)$ é um polinómio com coeficientes constantes, em D, então:

(a) $e^{rx}P(D)y = P(D-r)[e^{rx}y]$;
(b) $P(D)[e^{rx}y] = e^{rx}P(D+r)y$;
(c) $e^{-rx}P(D)[e^{rx}y] = \; P(D+r)y$

2.5 Operadores Inversos

Para completar o estudo do operador diferencial, considere-se agora o significado de $D^{-k}y$. Para se ser consistentes, consider-se

$D^{-1}y = \frac{1}{D}y = z$ uma expressão tal que $Dz = y$.

Por outras palavras, o efeito pelo operador diferencial com índice negativo chama-se integração. Este operador vai se chamar **operador diferencial Inverso.**

Definição 2.5.1 O operador diferencial inverso $(D-c)^{-k}$, $k = 1,2,...,$ define-se como integral $(D-c)^{-k}\,y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{k-1}}{(k-1)!} e^{c(x-u)}y(u)du$, onde x_0 é um número arbitrário, mas fixo.

Propriedade 2.5.2: As propriedades seguintes são relevantes para a discussão nesta secção.

Propriedade 2.5.2a. $\frac{1}{P(D)}[e^{rx}] = \frac{e^{rx}}{P(r)}$, if $P(r) \neq 0$

Propriedade 2.5.2b. $\frac{1}{P(D)}e^{rx} = \frac{x^k e^{rx}}{k!\varphi(r)}$.

Propriedade 2.5.2c. $\frac{1}{D^2+r^2}senrx = -\frac{x}{2r}\cos rx$.

Propriedade 2.5.2d. $\frac{1}{D^2+r^2}\cos rx = \frac{x}{2r}senrx$

Propriedade 2.5.2e. $\frac{1}{D^2+r^2}(csenbx) = \frac{c}{r^2-b^2}senbx\,, b \neq r$

Propriedade 2.5.2f. $\frac{1}{D^2+r^2}(c\cos bx) = \frac{c}{r^2-b^2}\cos bx\,, b \neq r$

Propriedade 2.5.2g. Ilustrado pelo exemplo: $\frac{1}{D(D+1)}[x^3] = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + 6$

Demonstração: $\frac{1}{D(D+1)} = D^{-1}(1 - D^2 + D^4 - ...)$

$$= D^{-1} - D^{1} + D^{3} - \ldots$$

Ter-se-á

$$\frac{1}{D(D+1)}[x^3] = D^{-1}[x^3] - D^{1}[x^3] + D^{3}[x^3] - \ldots$$

$$= \frac{x^4}{4} - 3x^2 + 6$$

Propriedade 2.5.2h. Mudança Exponencial.

$$\frac{1}{P(D)}[e^{rx}y] = e^{rx}\,\frac{1}{P(D+r)}[y].$$

Actividade de aprendizagem 2.5

Nesta actividade de aprendizagem o seu texto de referência é Mauch, S. (2004, pp.902-915). Identifique a propriedade correcta das secções 2.4 e 2.5 acima e use-a para executar as operações abaixo:

1. $D^2 e^{4x}$
2. $(D^2+4)^{-1} sen 2x$ *(Sugestão: Tente a propriedade 2.5.2c)*
3. $[D(D^2-1)]^{-1} 5x^4$ *(Sugestão: Tente a propriedade 2.5.2g)*

2.6 Aplicação do operador diferencial inverso para a solução de equações diferenciais lineares.

O uso da teoria de operadores pode simplificar a procura de integrais particulares para uma equação diferencial linear completa.

$$P(D)y = f(x) \qquad (2.6.1)$$

Se se tratar de (2.6.1) como uma simples equação algébrica, terá apenas que resolver y através de uma divisão

$$y = \frac{1}{P(D)} f(x) \qquad (2.6.2)$$

As propriedades nas secções 2.5.1 e 2.5.2 podem agora ser tidas em conta para o seu melhor uso e vantagem.

Exemplo. Determine o integral particular

$$D(D-2)^3(D+1)y = e^{2x}$$

Solução: Usando o exemplo da equação (2.6.2), resolva a y para obter o integral particular

$$y_p = [D(D-2)^3(D+1)]^{-1} e^{2x}$$

Pela propriedade (2.5.2b), com $r = 2$, $k = 3$, e $\varphi(D) = D(D+1)$

De modo que,
$\varphi(r) = r(r+1)$ = (2) (3) = 6, e obterá

$$y_p = \frac{x^3 e^{2x}}{3!6} = \frac{1}{36} x^3 e^{2x}$$

Actividade da aprendizagem 2.6: Trabalho em grupo

Nesta actividade discutirá a solução, num pequeno grupo de 3-5 membros. Parte da actividade da aprendizagem corresponde à identificação da propriedade correcta das secções 2.4 e 2.5 para cada questão.
Por favor tenha em mente que as duas equações podem também ser resolvidas através de outros métodos já aprendidos por si. Por exemplo, o método dos coeficientes indeterminados na secção 2.2.

Determine a solução completa das equações diferenciais seguintes:
1. $(D^2 - 4D + 4)y = xe^{2x}$
2. $(D^2 + 4)y = 4\cos 2x$

ACTIVIDADE DA APRENDIZAGEM #3

Séries de Soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem.

Objectivo específico da aprendizagem.
No fim desta unidade, o estudante deve ser capaz de:

- Resolver problemas de equações diferenciais com coeficientes variáveis, usando o método das séries de potências.

Sumário

Nesta unidade são estudadas as soluções de equações diferenciais lineares através de séries de potências. O método das séries de potências é particularmente aplicável na solução de equações diferenciais com coeficientes variáveis, onde alguns dos métodos estudados nas unidades prévias anteriores podem não servir. Assim, os dois métodos estudados nesta actividade de aprendizagem são: o método da diferenciação sucessiva e o método dos coeficientes indeterminados. A técnica das séries de potências para resolver equações diferenciais requer alguns conhecimentos básicos de funções especiais de séries de potências, como por exemplo a série de Taylor.

Leitura Obrigatória (Texto nuclear)

O texto nuclear desta actividade é Mauch, S (2004). *Introduction to Methods of Applied Mathematics*. Este está disponível no CD do curso.

Leitura Adicional Geral:
Wikibooks, *Differential Equations*

Palavras-chave

Séries de Potências: Uma série cujos termos contêm potências de integrais, positivas e crescentes, de uma variável. Ex. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ...$, onde os $a's$ são constantes e x é uma variável.

Coeficientes variáveis: (Veja nas palavras-chave da actividade da aprendizagem #2)

Série de Taylor: Em geral, se qualquer função pode ser expressa como uma série de potências tal como $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... + c_n(x-a)^n + ...$, aquela série considerada uma série de Taylor.

Diferenciação sucessiva: é um dos métodos usados para determinar uma solução em série de potências de uma equação diferencial.

Coeficientes indeterminados: (Veja nas palavras-chave da actividade da aprendizagem #2)

3. 1 Actividade da aprendizagem: Série de solução de uma equação diferencial linear de segunda ordem.

Até agora o foco de concentração esteve virado às equações diferenciais que podiam ser resolvidas com exactidão e a várias aplicações conduzidas pelas mesmas. Há determinadas equações diferenciais que são de grande importância em aplicações científicas, mas que não podem ser resolvidas exactamente em termos de funções elementares, através de qualquer método. Por exemplo, as equações diferenciais

$y^{/} = x^2 + y^2$ e $xy^{//} + y^{/} + xy = 0$ (3.1)

Não podem ser exactamente resolvidas em termos das funções usualmente estudadas no cálculo elementar.
A questão é: se a solução existe, qual é o caminho possível a ser seguido para determinar a solução requerida? Um possível caminho a ser seguido pode ser o de assumir que a solução (se ela existe) possui uma solução série. Neste momento, é importante introduzir uma série de potências, para auxiliar na procura de uma solução de tais problemas como os expostos nos dados acima em (3.1).

3.1.1 Definição: Série de Taylor**.**
Com base na Análise Matemática, aprendeu que uma função pode ser representada por uma série de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{//}}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots, \qquad (3.1.1)$$

Sabendo que todas as derivadas existem em $(x - x_0)$. Mais ainda, pode-se dizer que a função é analítica em $x = x_0$ se $f(x)$ poder ser desenvolvida numa série de potências válidas no mesmo ponto.

3.1.2 Definição- Ponto ordinário, ponto singular e ponto regular.

Considere a equação diferencial linear

$$[a_0(x)D_x^n + a_1(x)D_x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)D_x + a_n(x)]y = f(x) \qquad (3.1.2)$$

Na qual $a_i(x)$, e $(i = 0,\ldots,n)$ são polinómios.
O ponto $x = x_0$ diz-se **ponto *ordinário*** da equação se $a_0(x_0) \neq 0$. Qualquer ponto $x = x_1$ para o qual $a_0(x_1) = 0$ diz-se **ponto singula**r da equação diferencial. O ponto $x = x_1$ diz-se ponto ***regular*** se a equação (3.1.1) com $f(x) = 0$ pode ser escrita na forma $[(x - x_1)^n D^n + (x - x_1)^{n-1} b_1(x) D^{n-1} + (x - x_1) b_2(x) D^{n-2} + \ldots + (x - x_1) b_{n-1}(x) D + b_n(x)]y = f(x)$ (3.1.3), onde $b_i(x)$, $(i = 1,\ldots,n)$ são analíticas $x = x_1$.

Exemplos
Indique os pontos singulares de:
(a) $(x-3)y^{//} + (x+1)y = 0$
[Solução: $x = 3$]

(b) $(x^2+1)y^{///}+y^{//}-x^2y=0$
[Solução: $x=\pm i$]

Actividade da Aprendizagem 3.1.2 Indique os pontos singulares de:
(i) $8y^{///}-3x^3y^{//}+4=0$.*[Solução: Não tem solução]*
(ii) $(x-1)^2y^{//}-x(x-1)y^{/}+xy=0$.*[Solução: $x=1$ regular]*

A expressão " *Determine uma solução sobre o ponto* $x=x_0$," é usada no estudo de soluções de séries de potências de equações diferenciais. Esta significa obter uma série de potências de $(x=x_0)$ que sã válidas numa região (vizinhança) à volta do ponto x_0, que corresponde a uma expansão de uma função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial.

3.2 Método de diferenciação sucessiva.

Este método é também designado por método da série de Taylor. Este envolve a determinação da solução série de potências da equação diferencial.

$$p(x)y^{//}+q(x)y^{/}+r(x)y=0 \qquad (3.2.1)$$

onde $p(x), q(x)$ e $r(x)$ são polinómios, num ponto ordinário $x=a$.
Na solução de (3.2.1) para $y^{//}$, obtém-se

$$y^{//}=-\frac{q(x)y^{/}+r(x)y}{p(x)} \qquad (3.2.2)$$

Como vimos anteriormente, a um valor x tal que $p(x)=0$ denomina-se um ponto *singular ou singularidade,* da equação diferencial (3.2.1). Qualquer outro valor de x denomina-se um ponto *ordinário ou* ponto *não – singular.*

O método utiliza os valores das derivadas determinadas no ponto ordinário que são obtidas da equação diferencial (3.2.1) por diferenciação sucessiva. Quando as derivadas tiverem sido determinadas, usamos então a série de Taylor.

$$y(x)=y(a)+y^{/}(a)(x-a_0)+\frac{y^{//}(a)(x-a)^2}{2!}+\frac{y^{///}(a)(x-a)^3}{3!}+... \qquad (3.2.3)$$

Que dá a solução requerida.

Exemplo 3.2
Determine a solução de $xy^{//}+x^3y^{/}-3y=0$ que satisfaz $y=0$ e $y^{/}=2$ em $x=1$.

Solução

$$y^{//}=-x^2y^{/}+3x^{-1}y$$

$$y^{///}=-x^2y^{//}-(2x-3x^{-1})y^{/}-3x^{-2}y\,,$$

$$y^{iv}=-x^2y^{///}-(4x-3x^{-1})y^{//}-(2+6x^{-2})y^{/}+6x^{-3}y.$$

Calculando as derivadas em $x = 1$

$y^{//}(1) = -2$,

$y^{///}(1) = 4$,

$y^{iv}(1) = -18.$

Substituindo na série de Taylor (3.2.3), a solução é

$$y(x) = 0 + 2(x \ -1) - \frac{2(x-1)^2}{2} + \frac{4(x-1)^3}{6} + \frac{18(x-1)^4}{24} + ...$$

$$= 2(x-1) - (x \ -1)^2 + \frac{2(x-1)^3}{3} + \frac{3(x-1)^4}{4} + ...$$

Actividade da Aprendizagem 3.2

(i) **Literatura Obrigatória:** A leitura obrigatória para esta actividade de aprendizagem deve ser Mauch, S (2004,pp.1184-1198).

(ii) **Trabalho em Grupo**

Construa a equação diferencial de segunda ordem da forma (3.1.3) e para cada uma das equações calcule a singularidade, o ponto ordinário e o ponto regular respectivamentes.

(iii) **Solução de problema (Trabalho em grupo)**

(a) Resolva $y^{/} = x^2 + y^2$ dado $y = 1$ em $x = 0$.

[Solução $y(x) = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \frac{144x^5}{5!} + ...$ *]*

(b) Encontre a solução de $(x-1)y^{///} + y^{//} + (x-1)y^{/} + y = 0$

[Solução: $y(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots = senx$ *]*

3.3 Método dos coeficientes indeterminados

Se x_0 é um ponto ordinário de uma equação diferencial fornecida, a solução pode ser expandida na forma

$$y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) \ + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_k(x - x_0)^k + ... = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x - x_0)^i \qquad (3.3.1)$$

Falta determinar os coeficientes c_i, $(i = 0,...)$. Diferencia-se a série (3.3.1), termo a termo, para se obter

$$y^{/}(x) = 2c_2(x - x_0) + c_3(x - x_0)^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} ic_i(x - x_0)^{i-1} \qquad (3.3.2)$$

$$y^{//}(x) = 2c_2 + 3.2c_3(x - x_0) + 4.3c_4(x - x_0)^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)c_i(x - x_0)^{i-2} \qquad (3.3.3)$$

etc

Estes valores são substituídos na equação diferencial fornecida e reagrupados em termos de $(x-x_0)^i$, ou seja,

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i (x-x_0)^i = 0 \qquad (3.3.4)$$

Onde C_i são funções de c_i, e a equação é uma identidade em $(x-x_0)$, de modo que $C_i = 0$, $i = 0, \dots$. Isto determinara os valores de c_i.

Exemplo 3.3
Procure a solução série de

$$(x^2-1)y'' - 2xy' - 4y = 0 \qquad (3.3.5)$$

Solução:
Como se deseja a solução de um ponto ordinário, o primeiro passo consiste em escolher o ponto mais simples, no caso, tal ponto é $x=0$ para este exemplo. Assim, escreve-se

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots, \\ y'(x) &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + 6c_6 x^5 + \dots, \\ y''(x) &= 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x + 20c_5 x^3 + 30c_6 x^4 + \dots, \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.6\ )$$

As equações (3.3.6) são agora substituídas na equação (3.3.5) e os termos semelhantes em x são reunidos. Recomenda-se que faça isso numa tabela conforme a que, a seguir, se ilustra:

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
x^2y''			$2c_2$	$6c_3$	$12c_4$	...
$-y''$	$-2c_2$	$-6c_3$	$-12c_4$	$-20c_5$	$-30c_6$	...
$-2xy'$		$-2c_1$	$-4c_2$	$-6c_3$	$-8c_4$	...
$-4y$	$-4c_0$	$-4c_1$	$-4c_2$	$-4c_3$	$-4c_4$	...
Soma	0	0	0	0	0	...

Adicionando os coeficientes nas colunas:

$$2c_2 + 4c_0 = 0; \qquad c_2 = -2c_0$$

$$6c_3 + 6c_1 = 0; \qquad c_3 = -c_1$$

$$12c_4 + 6c_2 = 0; \qquad c_4 = -\frac{1}{2}c_2 = c_0$$

$$20c_5 + 4c_3 = 0; \qquad c_5 = -\frac{1}{5}c_3 = \frac{1}{5}c_1$$

$$30c_0 + 0c_4 = 0; \qquad c_6 = 0$$

Alguns dos primeiros termos da série podem agora ser escritos na forma

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_0 + c_1 x - 2c_0 x^2 - c_1 x^3 + c_0 x^4 + \frac{1}{5} c_1 + 0x^6 \\
&= c_0 (1 - 2x^2 + x^4 + \dots) + c_1 (x - x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \dots)
\end{aligned}
$$

Actividade da Aprendizagem 3.3

(i) Solução de problema:

Tente primeiro resolver este problema sozinho usando o exemplo (3.3) como material de suporte.

Determine a solução da série de:

(a) $(2x-1)y^{//}-3y^{/}=0$

(b) $(2x^2+1)y^{//}+3xy^{/}-6y=0$

(ii) Discussão em Grupo:

Discuta as suas soluções na parte (i) num pequeno grupo. Preste atenção para a forma como os outros membros do grupo resolveram o mesmo problema. Coloque-lhes questões relacionadas com a forma como chegaram às suas soluções.

(iii) Leitura Adicional:

http://www.answers.com/topic/power-series-method.

Wikipedia informação sobre o **método das** séries **de potências**

Este artigo está licenciado sob o GNU Free Documentation License e usa materiais da Wikipedia article "Power series method".

3.4 Funções especiais

Em matematica, **funções especiais,** são funções particulares, tais como as funções trigonométricas que têm propriedades úteis que ocorrem em diferentes aplicações, muitas vezes, suficientes para garantir um nome e sua própria atenção. Há vários pontos de vista sobre funções especiais, desde a teoria clássica, no século XX, até as teorias contemporâneas sobre as funções especiais. Algumas das funções especiais incluem as funções de Bessel, de Beta, de integrais Elípticas, Hiperbólicas, Parabólicas Cilíndricas, de erros, Gama e as de Whittaker. A lista real é mais vasta que esta, por isso se quiser aceder a mais informações sobre a teoria de funções especiais, encontra disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/Special_functions.

Actividades de aprendizagem 3.4: Leia na internet, página http://en.wikipedia.org/wiki/Special_functions e use os links disponíveis na mesma para identificar mais funções especiais.

ACTIVIDADE DA APRENDIZAGEM # 4

Equações diferenciais parciais; Transformações de Laplace, Séries de Fourier, e suas aplicações.

Objectivos específicos da aprendizagem

No fim desta unidade, o estudante deve ser capaz de:

- Definir o que é uma equação diferencial parcial;
- Definir correctamente as terminologias associadas às equações diferenciais parciais;
- Obter soluções de algumas equações diferenciais simples;
- Aplicar o método de variação parâmetros para resolver equações diferenciais parciais de segunda ordem;
- Definir a transformada de Laplace e as séries de Fourier, respectivamentes;
- Apreciar a aplicação da transformada de Laplace e da série de Fourier na solução de problemas Físicos, como por exemplo, da condução do calor.

Resumo

A formulação de problemas matemáticos envolvendo duas ou mais variáveis independentes conduz a equações diferenciais parciais. Nesta actividade de aprendizagem são definidas equações diferenciais parciais (EDPs) e terminologias associadas com EDPs. São também introduzidas soluções de algumas EDPs simples e discute-se o método de variação de parâmetros na sua relação com as EDPs de segunda ordem. A transformada de Laplace e a série de Fourier são também definidas nesta actividade de aprendizagem, juntamente a discussão sobre o seu uso na solução de problemas de valores fronteiriços.

Literatura Obrigatória (Texto nuclear):

O texto nuclear para esta actividade é Mauch, S (2004). *Introduction to Methods of Applied Mathematics* : Mauch Publishing Company. Disponível no CD do curso.

Leitura geral adicional:

Wikibooks, *Differential Equations*

Palavras-chave

Variáveis Independentes: A expressão $y = 3x^2 + 7$ define y como uma função de x quando se especifica que o domínio é, por exemplo, um conjunto de números reais; y torna-se, então, uma função de x. O valor de y é associado a cada número real e o valor de x associado pela multiplicação do quadrado de x por 3, adicionando 7 e x considera-se ser a **variável independente** da função y.

Equações diferenciais parciais: Uma equação diferencial parcial (EDPs) é uma equação que envolve mais do que uma variável independente e derivadas parciais relativas à estas variáveis.

Variação de parâmetros (Confira nas palavras-chave da actividade da aprendizagem # 3)

Transformada de Laplace: A função f é a transformada de Laplace de g se $f(x)=\int e^{-xt}g(t)dt$, no qual o caminho de integração é uma curva no plano complexo. O costume é restringir o caminho de integração ao eixo real de 0 a $+\infty$.Consequentemente, a expressão formal para a transformada de Laplace passa a ser $f(x)=\int_0^{\infty} e^{-xt}g(t)dt$

Série de Fourier: Uma série da forma
$\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1 senx)+(a_2\cos 2x+b_2 sen2x)+...=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n sennx)$, para a qual existe uma função f de tal forma que:
para $n\geq 0$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$ e
para $n\geq 1$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sennxdx$.

Problemas do valor fronteiriço: O problema de determinar a solução de uma dada equação diferencial que estará em face de certos requisitos específicos para um dado conjunto de valores.

Actividades de aprendizagem

4.1 Equações diferenciais parciais (EDP) de segunda ordem

4.1.1 Introdução
Nos capítulos anteriores, os estudos centraram-se nas equações diferenciais ordinárias envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente. Aprendeu-se como é que tais equações diferenciais surgem, os métodos pelos quais as suas soluções podem ser obtidas, ambas exactas e aproximadas, e tomou-se em consideração as suas aplicações em vários campos científicos.
Constatou-se que formulações matemáticas de problemas envolvendo duas ou mais variáveis independentes conduzem a equações diferençais parciais. Como deve esperar, a introdução de mais variáveis independentes torna as equações diferenciais parciais mais complicadas do que as equações diferencias parciais ordinárias. A discussão que se segue, limita-se a equações diferenciais parciais de segunda ordem e ao método de separação de variáveis.

4.1.2 Algumas Definições

4.1.2a Uma ***equação diferencial parcial*** *é* uma equação que contém uma função desconhecida de duas ou mais variáveis e suas derivadas parciais em relação a essas variáveis.
4.1.2b A ***ordem de uma equação*** diferencial parcial é a da derivada de maior ordem presente.

Exemplo 4.1.2b. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ é uma equação diferencial parcial de ordem dois ou uma equação diferencial de segunda ordem. A variável dependente é u e as variáveis independentes são x e y.

4.1.2c A ***solução*** de uma equação diferencial parcial é uma função que satisfaz a equação identicamente.

4.1.2d A ***solução geral*** é uma solução que contém um número de funções arbitrárias independentes iguais a ordem da equação.

4.1.2e A ***solução particular*** é aquela que pode ser obtida da solução geral por escolha particular de funções arbitrárias.

Exemplo 4.1.2e. Como já se viu, a substituição $u = x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 + F(x) + G(y)$ é a equação diferencial parcial. Dado que esta contém duas funções arbitrárias independentes $F(x)$ e $G(x)$, e também a *solução geral*. Em particular se $F(x) = 2senx$, $G(x) = 4y^4 - 5$ obtém-se a *solução particular*, $u(x, y) = x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 + 2senx + 3y^4 - 5$ partir da solução generalizada a partir da escolha particular de funções arbitrárias.

4.1.2g Um problema ***do valor fronteiriço*** envolvendo uma equação diferencial parcial, procura todas as soluções de uma equação diferencial parcial que satisfaçam as condições denominadas *Condições limites.*

4.2 Soluções de algumas equações diferenciais simples

A classe das equações diferenciais que contém as derivadas parciais em relação a uma única variável resolve-se pelas técnicas das equações diferenciais ordinárias, de modo a obter algumas ideias sobre a natureza das soluções da equação diferencial parcial. Considere-se o problema seguinte para discussão:

4.2.1 Exemplos: Determine a solução da EDP

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 6x + 12y^2 \qquad (4.2.1a)$$

Aqui, a variável dependente U depende das duas variáveis independentes x e y. Para determinar a solução, procuramos determinar $U(x, y)$, isto é, U em termos de x e y se se escrever (4.2.1a) na forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 6x + 12y^2 \qquad (4.2.1b)$$

Pode-se integrar em relação a x mantendo y constante, para determinar

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 3x^2 + 12xy^2 + F(y) \qquad (4.2.1c)$$

Onde adiciona-se a "constante" arbitrária de integração que depende de y

denotada por $F(y)$. Agora, pode-se integrar (4.2.1c) em relação a y mantendo x constante, obtendo

$$U = 3x^2 y + 4xy^3 + \int F(y)dy + G(x) \qquad (4.2.1d)$$

Neste momento, a função arbitrária de x, $G(x)$ é adicionada, dado que o integral de uma função arbitrária de y é uma outra função arbitrária de y, pode-se escrever (4.2.1d) na forma

$$U = 3x^2 y + 4xy^3 + H(y) + G(x) \qquad (4.2.1e)$$

Isto pode ser verificado pela substituição desta em (4.2.1a) e obtendo uma identidade. A equação (4.2.1e) denomina-se *solução geral* de (4.2.1a). Se $H(y)$ e $G(x)$ são conhecidas, por exemplo $H(y) = y^3$ e $G(x) = senx$, a equação (4.2.1a) é designada *solução particular*.

Em geral, dada uma equação diferencial parcial de n-ésima ordem, uma solução contendo n funções arbitrárias é designada *solução geral*, e qualquer solução obtida desta solução geral por escolhas particulares de constantes arbitrárias passa a ser chamada de *solução particular*.
Como no caso de equações diferenciais ordinárias, pode acontecer que existam soluções singulares que não possam ser obtidas da solução geral por qualquer escolha de funções arbitrárias. Por exemplo, suponhamos que pretendemos resolver (4.2.1a) sujeita a duas condições

$$U(1, y) = y^2 - 2y,\ U(x,2) = 5x - 5 \qquad (4.2.1f)$$

Então, da solução geral (4.2.1e), constitui a primeira condição de (4.2.1f) e se obtêm

$$U(1, y) = 3(1)^2 y + 4(1)y^3 + H(y) + G(1) = y^2 - 2y$$

ou $H(y) = y^2 - 5y - 4y^3 - G(1)$

de modo que $U = 3x^2 y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - G(1) + G(x)$ (4.2.1g)

Entretanto, se se usar a segunda condição na solução geral (4.2.1e)

$$U(x,2) = 3x^2(2) + 4x(2)^3 + (2)^2 - 5(2) - 4(2)^3 - G(1) + G(x) = 5x - 5 \qquad (4.2.1h)$$

Em que $G(x) = 33 - 27x - 6x^2 + G(1)$.
Usando-a em (4.2.1g), obtêm-se a solução requerida

$$U = 3x^2 y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - G(1) + 33 - 27x - 6x^2 + G(1)$$

$$U = 3x^2 y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - 27x - 6x^2 + 33 \qquad (4.2.1i)$$

4.3 O Método de Separação de Variáveis

Neste método assume-se que uma solução pode ser expressa como um produto de funções desconhecidas, em que cada uma é dependente, somente, de uma variável independente. O sucesso do método reside em se conseguir escrever a equação resultante, de modo que um membro da equação dependa somente de uma variável, enquanto que o outro membro dependa das restantes variáveis, de tal modo que cada membro constitua uma constante. Pela repetição desta operação, as funções desconhecidas podem ser determinadas. Destas, algumas soluções podem ser usadas para determinar a solução actual.

Teorema 4.3.1
Seja a equação diferencial parcial linear

$$\phi(D_x, D_y, ...)U = F(x, y, ...) \qquad (4.3.1a)$$

onde $x, y, ...$ são variáveis independentes e $\phi(D_x, D_y, ...)$ é um operador polinomial em $D_x, D_y, ...$. Então, a solução geral de (4.3.1a) é a soma de soluções U_c da função complementar $\phi(D_x, D_y, ...)U = 0$ (4.3.1b) e qualquer solução particular U_p de (4.3.1a). A solução geral seria $U = U_c + U_p$ (4.3.1c)

Teorema 4.3.2
Sejam $U_1, U_2, ...$ soluções de equações $\phi(D_x, D_y, ...)U = 0$.
Então se $a_1, a_2, ...$ são constantes quaisquer

$$U = a_1U_1 + a_2U_2 + ... \qquad (4.3.2a)$$

E é, também, uma solução.
Este teorema está referenciado como *princípio de superposição.*

Suponha que uma solução de (4.3.1b) seja da forma

$$U = X(x)Y(y) \quad \text{ou simplesmente} \quad U = XY \qquad (4.3.2b)$$

Isto é, uma função de x vezes, uma função de y.
O método de solução usando (4.3.2b) designa-se por método de separação de variáveis (MSDV). A melhor forma de ilustrar o MSDV é através de um exemplo.

Exemplo 4.3.2.Resolva o problema do valor limite

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad U(0, y) = 4e^{-2y} - 3e^{-6y} \qquad (4.3.2c)$$

Solução. Aqui as variáveis dependentes são x e y, então substituí-se $U = XY$ na equação diferencial dada, onde X depende somente de x e Y depende somente de y.

$$\frac{\partial(XY)}{\partial x} + 3\frac{\partial(XY)}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad X^{/}Y = -3XY^{/}$$

$$\frac{X^{/}}{3X} = -\frac{Y^{/}}{Y} \qquad (4.3.2d)$$

Dado que um membro depende só de x e o outro depende só de y, e como X e Y são variáveis independentes, a equação (4.3.2c) pode ser verdadeira se, e somente se, cada membro for igual a mesma constante.

$$\frac{X^{/}}{3X} = -\frac{Y^{/}}{Y} = c \qquad (4.3.2d)$$

De (4.3.2d) tem-se, portanto

$$X^{/} - 3cX = 0 \qquad Y^{/} + cY = 0 \qquad (4.3.2e)$$

Com base no conhecimento de equações diferenciais ordinárias, (4.3.2e)
Encontram-se soluções

$$X = b_1 e^{3cx}\ ,\ Y = b_2 e^{-cy} \qquad (4.3.2f).$$

Assim,

$$U = XY = b_1 b_2 e^{c(3x-y)} = Be^{c(3x-y)} \qquad (4.3.2g)$$

onde $B = b_1 b_2$.

Agora, usando a condição em (4.3.2g) em (4.3.2c) obtêm-se

$$B\ e^{-cy} = 4e^{-2y} - 3e^{-6y} \qquad (4.3.2h)$$

Infelizmente, (4.3.2h) não pode ser verdadeira para qualquer escolha de B e c e pode parecer que o método falha! A situação resolve-se pelo **uso do Teorema 4.3.2** na *superposição de soluções*. De (4.3.2g) observa-se que

$U_1 = b_1 e^{c_1(3x-y)}$ e $U_2 = b_2 e^{c_2(3x-y)}$ são ambas soluções e assim, a solução geral deve ser

$$U = b_1 e^{c_1(3x-y)} + b_2 e^{c_2(3x-y)} \qquad (4.3.3h)$$

A condição limite de (4.3.2h) conduz agora a

$$b_1 e^{-c_1 y)} + b_2 e^{-c_2 y} = 4e^{-2y} - 3e^{-6y}$$

que é satisfeita se se escolher $b_1 = 4\,, c_1 = 2\,, b_2 = -3\,, c_2 = 6$.
Isto conduz à solução desejada de (4.3.2g) dada por

$$U = 4e^{2(3x-y)} \text{-} 3e^{6(3x-y)}$$

Dica de Aprendizagem:

O estudante pode se interrogar sobre as razões de não se ter resolvido o problema acima determinando primeiro a solução geral e, só, depois obter a solução particular. A razão é que, à excepção dos casos muito simples, a solução é muitas vezes difícil de determinar e, mesmo quando pode ser obtida, pode ser difícil determinar a solução particular desta.
Contudo, a experiência demostra que para os problemas mais difíceis que surgem da prática, a separação de variáveis combinada com o principio de superposição provou ser um sucesso.

Actividade da Aprendizagem 4.3

Discussão em grupo.

Determine se cada uma das equações diferenciais parciais seguintes é linear ou não linear. Determine a ordem de cada equação, indicando se a variável é dependente ou independente. *Depois verifique as soluções destas questões após a vossa discussão. As vossas soluções coincidem com as dadas?*

ATENCÃO: Por favor, somente verifique as soluções depois de tentar resolver os problemas e de ter anotado as respostas de cada uma das questões.

(a) $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ [Solução: *linear; ordem2; var. dependente.* u *;var. independente.* x, t*.]*

(b) $x^2 \frac{\partial^3 R}{\partial y^3} = y^3 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ [Solução: *linear; ordem3; var. dependente.* R *; var. independente.* x, y*.]*

(c) $W \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = rst$ [Solução: não *linear; ordem2; var. dependente.* W *; var. independente .* r, s, t*.]*

(d) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ [Solução: *linear; ordem2; var. dependente.* φ *; var. Independente .* x, y, z*..]*

(e) $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$ [Solução: não *linear; ordem1; var. dependente.* z *; var. Independente* u, v*.]*

Leitura obrigatória:
Por favor, leia Mauch, S (2004, pg.1704-1705) disponível no seu CD.

Use os exemplos para resolver os problemas que se seguem.
1. Obtenha a solução dos problemas do valor limite

(i) $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0;\ V(0, y) = 3\sin y,\ V_x(x,1) = x^2$

(ii) $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 4xy + e^x;\ U_y(0, y) = y,\ U(x,0) = 2$.

2. Compare as suas notas com as dos outros membros do grupo e discutam qualquer diferença de metodologia.

4.4 Transformada de Laplace

Na discussão precedente deste módulo aprendeu como resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, sujeitos as condições dadas, denominadas condições limites ou condições iniciais. Aqui, voltará a lembrar que o método usado consiste em determinar a solução geral das equações, no que respeita ao número de constantes arbitrárias e, por via disso, determinará estas constantes a partir das condições dadas. No decurso da resolução de problemas de equações diferenciais deparou-se com muitos desafios até chegar às soluções. Provavelmente, desejou que existissem outras técnicas para poder resolver tais problemas. O método da Transformada de Laplace fornece mais uma poderosa técnica de resolução de problemas de equações diferenciais. Este método tem várias vantagens comparativamente com os outros métodos.
Inicialmente, pelo uso do método pode-se transformar uma dada equação diferencial numa equação algébrica. De Seguida, quaisquer condições iniciais dadas são incorporadas automaticamente no problema algébrico, de modo que nenhuma consideração especial sobre elas seja necessária. Finalmente, o uso das tabelas da Transformada de Laplace reduz o trabalho de obter soluções, tal como o uso da tabela de integrais reduz o trabalho da integração.

Definição 4.4.1

A Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é definida como sendo

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (4.4.1)$$

E diz-se existir ou não de acordo com o integral em (4.4.1)**.** Se existe converge, se não existe diverge. O conjunto de valores $s > s_0$ ($s_0 \in R$) para os quais (4.4.1) existe chama-se âmbito *de convergência ou existência* de $L\{f(t)\}$. Contudo, pode acontecer que (4.4.1) não exista para qualquer valor de s. O símbolo L em (4.4.1) chama-se operador da Transformada de Laplace.
As Transformadas de Laplace de algumas funções elementares são fornecidas na tabela que se segue, para sua fácil referência.

	$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$ $\quad s > 0$
2.	$t^n \quad n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad s > 0$
3.	$t^p \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ $\quad s > 0$
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $\quad s > a$
5.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\quad s > 0$
6.	$sen \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\quad s > 0$
7.	$\cosh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $\quad s > \lvert a \rvert$

8.	$senh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > \| a \|$

Exemplo. 4.4.2 Resolva $y^{//} - 3y^{/} + 2y = 2e^{-t}$, $y(0) = 2,\ y^{/}(0) = -1$

Solução. Tomando a transformada de Laplace de uma equação diferencial dada,

$$[s^2Y - sy(0) - y^{/}(0)] - 3[sY - y(0)] + 2Y = \frac{2}{s=1}$$

Então, usando as condições iniciais $y(0) = 2,\ y^{/}(0) = -1$ e resolvendo a equação algébrica para Y , recorrendo às fracções parciais,

$$Y = \frac{2s^2 - 5s - 5}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{1/3}{(s+1)} + \frac{4}{(s-1)} + \frac{-7/3}{(s-2)}$$

Tomando a transformada inversa de Laplace, obter-se-à solução desejada

$$y = \frac{1}{3}e^{-t} + 4e^{t} - \frac{7}{3}e^{2t}$$

Actividade da aprendizagem 4.4

Leitura Obrigatória:

Por favor, leia Mauch, S (2004, pg.1475-1492) disponível no seu CD.

Resolução de Problema: Use a literatura e as notas para resolver os problemas seguintes:

Resolva pelo método da transformada de Laplace

(i) $y^{//}(t) + y^{/}(t) = 1$, $y(0) = 1,\ y^{/}(0) = 0$

(ii) $y^{//}(t) - 3y^{/}(t) + 2y(t) = 4$, $y(0) = 1,\ y^{/}(0) = 0$

4.5 Série de Fourier

O conceito de *Série de Fourier* é assim denomidado em homenagem ao homem que a descobriu na sua pesquisa sobre a equação do calor envolvendo equações diferenciais parciais. A série tem várias aplicações em problemas Físicos. Por exemplo, na equação da condução do calor (e sua difusão)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

onde k é constante e $U(x,t)$ é a temperatura num lugar x no momento t.

Definição 4.5.1

Dada uma função $f(x)$ definida no intervalo $-L \le x \le L$,encontre os coeficientes chamados coeficientes de Fourier, dados por

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx\ ,\quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\frac{k\pi x}{L}dx \qquad (4.5.1a)$$

Usando aqueles coeficientes em (4.3), e supondo que a série converge para $f(x)$, a requerida série de Fourier é obtida por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k sen\frac{k\pi x}{L}\right) \qquad (4.5.1b)$$

4.5.2 Aplicação à equação da condução do calor

Exemplo: Uma barra de metal de 100cm de comprimento tem extremidades $x = 0$ e $x = 100$, mantida a 0^0 c. Inicialmente, a metade da barra está a 60^0 c, enquanto a outra metade esta a 40^0 c . Supondo que o coeficiente da condução do calor corresponde a 0.16 unidades, e que a superfície da barra é isolada, determine a temperatura em toda a barra no momento t.

Formulação Matemática
A equação da condução do calor é

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0.16\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad \textbf{(}4.5.2a)$$

onde $U(x,t)$ corresponde a temperatura no lugar x no momento t. As condições limites são

$$U(0,t) = 0\,,\ U(100,t) = 0\ ,\ U(x,0) = \begin{cases} 60, & 0 < x < 50 \\ 40, & 50 < x < 100 \end{cases} \qquad (4.5.2b)$$

Solução
Considere $U = XT$ em (4.5.2a) e da discussão prévia, nesta secção 4.3, na equação diferencial parcial, obter-se-a

$$XT^{/} = 0.16X^{//}T \qquad \text{or} \quad \frac{T^{/}}{0.16T} = \frac{X^{//}}{X} \qquad (4.5.2c)$$

supondo que esta expressão é igual a uma constante segundo a qual, de acordo com a experiência prévia, indicou que era negativa e que se denota por $-\psi^2$, terá-se

$$\frac{T^{/}}{0.16T} = \frac{X^{//}}{X} = -\psi^2$$

ou $\quad T^{/} + \psi^2 T = 0 \quad , \quad X^{//} + \psi^2 X = 0 \qquad (4.5.2d)$

A solução para (4.5.2.d**)** é

$$U(x,t) = e^{-0.16\psi^2 t}(A\cos\psi x + B\sin\psi x) \qquad (4.5.2e)$$

As duas primeiras condições em (4.5.1b**)** mostram que $A = 0, \psi = n\pi/100$.
Para satisfazer a última condição em (4.5.1b**),** usa-se a superposição das soluções para poder se obter

$$U(x,t) = b_1 e^{-16(10)^{-6}\pi^2 t} sen\frac{\pi x}{100} + b_2 e^{-64(10)^{-6}\pi^2 t} sen\frac{2\pi x}{100} + \ldots \quad (4.5.2f)$$

Para $t = 0$,

$$b_1 sen\frac{\pi x}{100} + b_2 sen\frac{2\pi x}{100} = U(x,0) \qquad (4.5.1g)$$

Consequentemente, usando (4.3a) o resultado será

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{100}\int_0^{100} U(x,0) sen\frac{n\pi x}{100}dx \\ &= \frac{2}{100}\int_0^{50}(60)sen\frac{n\pi x}{100}dx\ b_n + \frac{2}{100}\int_{50}^{100}(40)sen\frac{n\pi x}{100}dx \\ &= \frac{120}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{80}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right) \end{aligned}$$

Consequentemente $b_1 = \frac{200}{\pi}$, $b_2 = \frac{40}{\pi}\ldots$ e a equação (4.5.1f) transforma-se em

$$U(x,t) = \frac{200}{\pi} e^{-16(10)^{-6}\pi^2 t} sen\frac{\pi x}{100} + \frac{40}{\pi} e^{-64(10)^{-6}\pi^2 t} sen\frac{2\pi x}{100} + \ldots$$

O que corresponde à solução desejada.

4.5.3 Harmónicas Esféricas (HE)

As **harmónicas esféricas** são as porções angulares, o conjunto ortogonal de soluções e a equação de Laplace, representados num sistema de coordenadas esféricas. As harmónicas esféricas têm muitas aplicações úteis em ciências matemáticas e físicas. No geral, o tratamento de harmónicas esféricas envolve algum rigor matemático. Contudo, para o propósito deste curso introdutório; limitar-se-a as aplicações teóricas e práticas das harmónicas esféricas.

Leitura Obrigatória: http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonic

Leia a página web acima e anote algumas aplicações de harmónicas esféricas em Matemática, Física, Química, Biologia, e TIC. De forma pormenorizada, anote a aplicação gráfica de 3D, também discutida nos Conhecimentos Básicos das TICs, Módulo 4.

Actividade da aprendizagem 4.5:

Leitura Obrigatória: Por favor, leia Mauch, S. (2004, pg.1333-1345) incluso no seu **CD**

Trabalho em GRUPO: Discuta a solução do problema que se segue num pequeno grupo de 5-6 membros.

***Dica de Aprendizagem**: Use o exemplo 4.5.2 e o princípio geral da separação e superposição de variáveis para discutir a solução do problema da condução do calor:*
É importante escolher um modelo apropriado de equação diferencial parcial a ser resolvido. O modelo de equação deve incorporar todas as variáveis dadas.

Uma barra de metal de 100cm de comprimento tem extremidades $x = 0$ e $x = 100$ mantida a 0^0 C. Inicialmente, a metade da direita da barra está a 0^0C, enquanto a outra metade está a 80^0 C. Supondo uma condução do calor (difusão) coeficiente de 0.20 unidades é uma superfície isolada, determine a temperatura em qualquer posição da barra, a qualquer momento.

11. LISTA COMPILADA DE TODOS OS CONCEITOS CHAVE (Glossário)

Problemas do valor Limite: Corresponde ao problema de determinar uma solução de uma equação diferencial fornecida com determinados requisitos para um dado conjunto de valores.

Grau: O grau de uma equação diferencial ordinária é a potência da derivada de maior ordem da equação.

Equação diferencial: Uma equação diferencial é uma relação entre uma função e as suas derivadas

Série de Fourier: Uma série da forma
$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 senx) + (a_2 \cos 2x + b_2 sen2x) + ... = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sennx)$, para a qual existe uma função f de tal forma que,
Para $n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$ e,
Para $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sennxdx$

Variáveis independentes: A expressão $y = 3x^2 + 7$ define y como uma função de x quando está explícito que o domínio é, por exemplo, um conjunto de números reais; y seria, então, uma função de x. Um valor de y é associado a cada número real valor de x pela multiplicação do quadrado de x por 3 e adicionando 7, e x seria a variável independente a função y.

Técnica inversa: Esta técnica é aplicada na solução de equações diferenciais, usando as propriedades de um operador diferencial.

Transformada de Laplace: A função f corresponde à transformada de Laplace de g se $f(x) = \int e^{-xt} g(t)dt$, onde o caminho de integração é alguma curva no plano complexo. O costume é restringir o caminho de integração ao eixo real de 0 a $+\infty$.Consequentemente, a expressão formal para a transformada de Laplace é $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} g(t)dt$.

Equações não - homogéneas: uma equação diferencial homogénea é uma equação cujo segundo membro é igual a zero. Uma equação diferencial não - homogénea é uma equação cujo segundo membro é diferente de zero.

Ordem: A ordem de uma ED é um número inteiro indicando na derivada de maior ordem da equação dada.
.
Equações diferenciais parciais: Uma equação diferencial parcial (EDPs) é uma equação que envolve mais do que uma variável independente e derivadas parciais em relação à estas variáveis.

Série de Potências: é uma série cujos termos contêm potências integrais crescentes positivas de uma determinada variável. E.g. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ...$, onde os $a's$ são constantes e x é uma variável.

Coeficientes indeterminados: Estes são constantes a serem determinadas, explicitamente, pela resolução do integral particular de uma equação diferencial. Este método chama-se método dos coeficientes indeterminados.

Coeficientes variáveis: Diferente das equações diferenciais com coeficientes constantes, existem equações diferenciais com coeficientes variáveis. Essencialmente, um coeficiente variável é aquele que não é uma constante, ou seja, é uma expressão usada na sua forma funcional.

Variação de parâmetros: Este é um método usado para determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear, quando a solução geral da equação reduzida (equação homogénea) é conhecia. (Para mais detalhes, observe as notas abaixo).

Série de Taylor: Em geral, se qualquer função pode ser expressa como uma série de potências tal como $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... + c_n(x-a)^n + ...$, essa série constitui uma série de Taylor.

Diferenciação sucessiva: É um dos métodos usados para determinar soluções da série de potências de uma equação diferencial.

12. LISTA COMPILADA DE LEITURA OBRIGATÓRIA (Referência Completa + resumo)

Mauch, S. (2004).*Introduction to Methods of Applied Differential Equations*. Mauch Publishing Company.
Capítulos Requeridos: 14, 15, 16, 17, 21, 23, 28, 30, 35, 36, 37.

Resumo

Este livro apresenta vários materiais de matemática, todos compilados num volume. Está escrito com vista a apoiar o estudo independente, bem como a aprendizagem convencional. O material é apresentado numa sequência fácil de ser seguida. No geral, o livro aborda as Equações Diferenciais com grande detalhe e fornece exemplos, bem como exercícios resolvidos. Uma das principais vantagens do livro é o facto de estar disponível online e sem custos. Pode também ser baixado num CD. A este respeito, os aprendentes distantes particularmente aqueles das zonas rurais mais pobres em África, se beneficiarão do acesso gratuito ao livro num CD.

13. LISTA COMPILADA (OPCIONAL) DE RECURSOS MULTIMÉDIA

A **wxMaxima** é necessária para este curso. Ela é um sistema informático de álgebra (CAS), disposto num programa de software. É necessário que seja instalado no seu computador, espaço onde pode usar o software para explorar as equações diferenciais. O software é uma fonte aberta, o que significa que está completamente livre para usá-lo. Os files para a instalação estão incluídos no CD do curso. Entretanto, também está disponível na Internet em: http:// wxmaxima.sourceforge.net/.

14. LISTA COMPILADA DE LINKS ÚTEIS (Nome da página/site; URL; Descrição/Fundamentação)

Resumo:

As páginas seguintes da web são da Wikibooks. Elas fornecem os links úteis para os materiais de estudo, em tópicos de equações diferençais, sem custo. Portanto, são muito recomendadas como material suplementar para a leitura obrigatória. Os tópicos cobertos são mencionados em cada página web para indicar o conteúdo.

Equações diferenciais / Primeira ordem
http://en.wikibooks.org/wiki/ Differntial _Equations/First_Order

Equações diferenciais / variáveis separáveis
http://en.wikibooks.org/wiki/ Differntial _Equations/Separable_1

Equações diferenciais /Exactas1
http://en.wikibooks.org/wiki/ Differntial _Equations/ Exact_1

Equações diferenciais / métodos de substituição
http://en.wikibooks.org/wiki/ Differntial _Equations/Substitutions_1

Equações diferenciais / Homogêneas 1
http://en.wikibooks.org/wiki/ Differntial _Equations/ Homogeneous_ 1

Equações diferenciais / Nao-Homogêneas 1
http://en.wikibooks.org/wiki/ Differntial _Equations/ Non_Homogeneous_1_

Introdução às equações diferenciais parciais
http://en.wikibooks.org/ Partial_Differntial _Equations

Equações diferenciais parciais / Laplaciano e Equação de Laplace
http://en.wikibooks.org/ Partial_Differntial _Equations/ The Laplacian_ and_ Laplace's Equation

Detalhes e aplicações da Série de Fourier
http://en.wikibooks.org/ Partial_Differntial _Equations/ Details _and_Applications_of_ Fourier Series

15. SÍNTESE DO MÓDULO

Neste módulo, as *equações diferencias Ordinárias e equações diferenciais de ordem superior* são estudadas através de quatro principais actividades da aprendizagem. Na unidade um, centra-se particular atenção para as equações diferenciais ordinárias homogéneas e não - homogéneas. Algumas das técnicas discutidas incluem a variação de parâmetros, o método dos coeficientes indeterminados e operadores inversos respectivamente. Na unidade dois, dá-se atenção às soluções de séries de equações diferenciais e também considera-se as equações e soluções por separação de variáveis. Outros tópicos discutidos nesta unidade são as transformações de Laplace, as séries de Fourier, as transformações de Fourier, funções especiais e harmónicas esféricas, e suas aplicações.
No fim deste módulo, o estudante deve ser capaz de demonstrar compreensão de equações diferenciais e a forma como elas se integram na teoria e na prática. Assim sendo, o aspecto importante do curso, primeiro, consiste em saber como resolver equações diferenciais usando uma variedade de métodos. Segundo, estudante deve demonstrar também compreensão de conceitos e propriedades de funções especiais e harmónicas especiais e suas aplicações na matemática, ciências físicas e TICs respectivamentes.

16. AVALIACÃO SUMATIVA

Avaliação Sumativa **Duração: 3 hrs**

INSTRUÇÕES

Responda a todas as questões da secção **A** e Duas (2) a sua escolha da secção **B**

Secção A *(Deve responder a todas as questões desta secção)*

Q1. Indique a ordem e o grau das equações diferenciais seguintes.

a) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = e^x$ (2 pontos)

b) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = \sin x$ (2 pontos)

c) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + y = 2$ (2 pontos)

d) $\left(y\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + 3\cos x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = 0$ (2 pontos)

Q2. Determine a equação diferencial associada a seguinte solução.

$y = Ax^2 + Bx + C$ (8 pontos)

Q.3 Resolve o problema do valor inicial.

$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x^2y,$ dado $y(0) = 2$ (8 pontos)

Q4. Determine se as equações seguintes são ou não exactas.

a) $\left(3x^2 - 2y^2\right)dx + \left(1 - 4xy\right)dy = 0$ (4pontos)

b) $(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$ (4pontos)

Q5 Determine a solução geral da equação diferencial homogénea

$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x^2y,$ (8pontos)

Secção B *(Deve responder a apenas duas questões desta secção, a sua escolha)*

Q.6 Resolve a equação diferencial

$y'' - 5y + 6y = 2e^x$ pelo método da variação de parâmetros (20 pontos)

Q.7 Uma chávena de chá a 90^0C é colocada a mesa, numa sala com temperatura constante de 20^0C. Por experiência, sabe-se que leva 10 minutos para a temperatura do chá baixar de 90^0C para 70^0C.
Qual será a temperatura do chá 30 minutos depois. (20 pontos)

Q.8 Resolve a equação diferencial:
$y'' + x^2 y = 0$
Pelo método da Série de Potências. (20 pontos)

Q.9 Resolve a equação usando as transformadas de Laplace:
$y'' - 3y' + 2y = 12e^{4t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$ (20 pontos)

Soluções

Q1.

	Ordem	Grau	Comentários
(a)	1	2	Maior ordem = 1
(b)	2	1	Maior ordem = 2
(c)	2	1	Maior ordem = 2
(d)	4	2	Maior ordem = 4

Q2.

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

$$y''' = 0$$

A equação diferencial é $y''' = 0$

Q3. $$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x^2 y = x^2(1+3y)$$

Usando o método de separação de variáveis:

$$\frac{dy}{(1+3y)} = x^2 dx$$

Integrando ambos membros:

$$\frac{1}{3}\ln(1+3y) = \frac{x^3}{3} + \ln C$$

$$\ln(1+3y) = x^3 + K \qquad (K \text{ é uma constante})$$

$$\therefore (1+3y) = Ae^{x^3} \qquad (A = e^K)$$

At $x = 0, y = 2$

$$(1+6) = A$$

$$A = 7$$

Assim, a solução desejada é:

$$(1+3y) = 7e^{x^3}$$

Q4(a). A solução geral é $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Diz-se exacta se:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(3x^2 - 2y^2)dx + (1-4xy)dy = 0$$

$$M = 3x^2 - 2y^2 \text{ e } N = (1-4xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4y, \frac{\partial N}{\partial x} = -4y$$

dado, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = -4y$

A equação dada é exacta.

Q4 (b). $(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$

$M = 2x^3 + 3y$ e $N = (3x + y - 1)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3, \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

Dado, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3$

A equação dada é exacta.

Q5. $y'' + 4y' + 13y = 0$

Seja $y = e^{mx}$

A equação auxiliar é:

$$m^2 + 4m + 13 = 0$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 6i}{2}$$

$$= -2 \pm 3i \qquad \text{(raizes complexas)}$$

Existem duas raízes: $-2 + 3i$, $-2 - 3i$

A solução geral é:

$$y = e^{-2x}[A\cos 3x + B\sin 3x]$$

Q6. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

A equação auxiliar é $m^2 - 5m + 6 = 0$

$\Rightarrow m = 2$ and $m = 3$

$\therefore$ A função complementar é $y_c = Ae^{2x} + Be^{3x}$

Seja $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$

O integral particular y_p é dado por:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

onde: $v_1(x) = \displaystyle\int \frac{-g(x)y_2}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}dx$

$$v_2(x) = \int \frac{g(x)y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}dx$$

e $g(x) = 2e^x$

$$\begin{aligned} v_1 &= \int \frac{-2e^x e^{3x}}{e^{5x}} dx \\ &= -2\int e^{-x} dx \\ &= 2e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \int \frac{2e^x e^{2x}}{e^{5x}} dx \\ &= 2\int e^{-2x} dx \\ &= -e^{-2x} \end{aligned}$$

Assim, $y_p = 2e^x - e^x$

A solução geral é:

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= Ae^{2x} + Be^{3x} + e^x \end{aligned}$$

Q7. Seja $H(t)$ a temperatura do chá no momento t e H_0 a temperatura da sala no momento t.

Então:

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 20)$$

$$\Rightarrow (H - 20) = Ae^{-kt}$$

Em $t = 0$, $H = 90$ $, \Rightarrow A = 70$

De modo similar em $t = 10$, $H = 70$ $, \Rightarrow k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{7}{5}\right)$

$$\therefore H(t) = 70e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{7}{5}\right)t}$$

15 minutos depois ($t = 15$),

$$H(t) = 70e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{7}{5}\right)x15} = 51.6^0 C$$

A temperatura do chá 15 minutos depois será aproximadamente de $52^0 C$.

Q8. Seja $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

então

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo em $y'' + x^2 y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Colocando a série na mesma potência de *x*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

Somando toda a série para *n*=2 tem-se:

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_{n-2} \right] x^n = 0$$

Igualando os coeficientes das potências de *x*:

$$x^0 : 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$x^1 : 6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

Para x^n obtem-se a fórmula recursiva:

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} a_{n-2}, \; n \geq 2$$

Consequentemente:

$$n = 2; \quad a_4 = \frac{-1}{12} a_0$$

$$n = 3; \quad a_5 = \frac{-1}{20} a_1$$

$$n = 4; \quad a_6 = \frac{-1}{30} a_2 = 0 \quad (a_2 = 0)$$

$$n = 5; \quad a_7 = \frac{-1}{42} a_3 = 0 \quad (a_3 = 0)$$

$$n = 6; \quad a_8 = \frac{-1}{56} a_4 = \frac{1}{56 \times 12} \mathrm{a}_0$$

e:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 (1 - \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{672} x^8 - \mathrm{K}) + a_1 (x - \frac{1}{20} x^5 + \mathrm{K})$$

Q9. A transformada de Laplace da equação dada conduz a:

$$(s^2\overline{Y} - sY_0 - Y_1) - 3(s\overline{Y} - Y_0) + 2\overline{Y} = \frac{12}{s-4}$$

Colocando a condição inicial na equação: $Y_0 = 1$ e $Y_1 = 0$

$$\overline{Y}(s^2 - 3s + 2) - s + 3 = \frac{12}{s-4}$$

$$\overline{Y} = \frac{s^2 - 7s + 24}{(s-1)(s-2)(s-4)}$$

Agora:

$$\frac{s^2 - 7s + 24}{(s-1)(s-2)(s-4)} \equiv \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-4)}$$

Resolvendo as fracções parciais tem-se: $A = 6, B = -7, C = 2$

$$\overline{Y} = \left\{\frac{6}{s-1} - \frac{7}{s-2} + \frac{2}{s-4}\right\}$$

Consequentemente:

$$y = L^{-1}\left\{\overline{Y}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{6}{s-1} - \frac{7}{s-2} + \frac{2}{s-4}\right\}$$

$$= 6e^{t} - 7e^{2t} + 2e^{4t}$$

17. REFERENCIAS

Ayres, F.,Jr.(1981) *Differential Equations*.Singapore:McGraw-Hill.

Braun, M.(1978).*Differential* Equations and their Aplications.New York: Sringer Verlag. Pp.1-43.

Ince, E.L. (1956). *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications.

Johnson, W. (1913) *A Treatise on Ordinary and partial Differential Equations.* University of Michigan Historical Math Collection: John Wiley and Sons.

Mauch, S. (2004).*Introduction to Methods of Applied Differential Equations*. Mauch Publishing Company.

Nielson,K.L. (1962).*Differential* Equations.New York:Barnes & Noble.

Polynin, A.D., & Zaitsev, V.F., (2003).*Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations* (2nd Ed).Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press. ISBN 1-58488-297-2.

Stephenson, G. (1973). Mathematical Methods for Science Students. Singapore: Longman. P.380-486.

Spiegel, M.R. (1971) *Advanced Mathematcs for Engineers and Scientists*.USA:McGraw-Hill.

Spiegel, M.R. (1981).*Applied differential Equations.*New Jersy:Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs,ISBN 0-13-040097-1

Zwillinger, D (1997).*Handbook of Differential Equations*. (3rd Ed).Boston: Academic Press.

18. REGISTO DE ESTUDANTES

Nome do ficheiro em EXCEL: Estudante**_** Registo da Avaliação **_** Equações Diferenciais

Nome do estudante	Nº de Registo.	Avaliação 1	Avaliação 2	Avaliação 3	Média	Resultado final	Observações

19. O AUTOR PRINCIPAL DO MÓDULO

Mr.George L. Ekol, BSc/Ed, MSc.
E-mail: glekol@utlonline.co.ug; ekol@math.mak.ac.ug

George Ekol é docente Universitário e chefe de Departamento de Matemática, na Universidade de Kyambogo. É mestrado em Ciências, na área de Matemática, pela Universidade de Makerere, Uganda. Suas áreas de interesse em investigação incluem Modelagem estatística, Informática estatística e análise dados, Matemática educacional e estatística. Apresentou vários artigos em conferenciais locais e internacionais, nas quais se destacam ICME-9, Tokyo (2000);ICSTME, Goa, Índia (2001);ASE, UK (2002);ICMI-Study 14, Dortmund, Germany (2004);ICME-10, Denmark (2004);ICMI- Conferência Regional, Johannesberg, África do Sul (2005); e Park City Instituto de Matemáticas, Park City, Utah,USA(2005,2006).
É membro da Sociedade Matemática do Uganda (UMS), da Academia Nacional de Ciências do Uganda, (UNAS), da Associação Internacional de Estatísticas Educacionais (IASE), da Associação Internacional de Informática Estatística (IASC), e do Instituto Internacional de Estatística (ISI).

Esteve envolvido no desenho curso Básico de TICs, com Universidade virtual Africana (AVU) em 2005.