African Virtual University
Université Virtuelle Africaine
Universidade Virtual Africana

MAT 1104

Objet d'apprentissage 1

Objectif principal de l'apprentissage	Théorie des ensembles
Nature de l'objet d'apprentissage	Un sous-thème
Concepts clés	Mathématiques, théorie, ensemble, élément
Informations sur le module d'origine	Code : MAT 1104 FR Mathématiques discrètes Fana TANGARA
Accès au module d'origine	Cela doit être fourni par l'UVA
Extrait par:	Dr SAGBO Romaric
Date	08/05/2017

Théorie des ensembles

La notion d'ensemble est une notion première. On ne la définit pas, mais on peut assimiler un ensemble a une collection d'objets, un paquet de choses. Ces objets sont appelés ses éléments, considérés sans ordre, ni répétition possible ; "x est élément de l'ensemble E" se dit aussi "x appartient à E", ou "E contient x" et se note x □ E, ou E □ x.

Les ensembles permettent de définir tous les objets mathématiques. On écrit un ensemble en extension en écrivant tous ses éléments entre des accolades si cela est possible.

a. Un ensemble est fini s’il contient un nombre fini d’éléments.
b. Un ensemble qui n’est pas fini est dit infini. Pour écrire un ensemble infini par extension on se contente de faire figurer les premiers éléments de cet ensemble, qui est illimité. L’ensemble infini des nombres entiers se notera : V={0; 1; 2; 3; 4; 5; …}.
c. Un ensemble sans élément est dit vide : notation : □ ou { }. Par convention, le cardinal de □ = 0.
d. Un ensemble à un seul élément est appelé un singleton.
e. Un ensemble à deux éléments, une paire.

Objet d'apprentissage 2

Objectif principal de l'apprentissage	Notions de Sous-ensembles et Ensemble des parties
Nature de l'objet d'apprentissage	un sous-thème
Concepts clés	Mathématiques, théorie, ensemble, sous-ensemble, élément, partie
Informations sur le module d'origine	Code : MAT 1104 FR Mathématiques discrètes Fana TANGARA
Accès au module d'origine	Cela doit être fourni par l'UVA
Extrait par:	Dr SAGBO Romaric
Date	08/05/2017

Notions de Sous-ensembles et Ensemble des parties

Les sous-ensembles sont définis par la relation d'inclusion :

- A sous-ensemble de B ($A \subset B$) si et seulement si tout élément de A appartient à B. On dit alors que A est sous-ensemble, ou partie, de B.
- L'ensemble vide est inclus dans n'importe quel ensemble.
- Tout ensemble est inclus dans lui-même.

Ensemble des parties

Soit A un ensemble, l'ensemble des parties de A, noté P(A), est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.

Exemple 1. Si $A = \{1, 2, 3\}$, alors $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Comme $A \subset A$, $A \in P(A)$.

De plus, en général, si A possède n éléments, P(A) en possède 2^n.

Exemple 2. Si $A = \emptyset$, $P(A) = \{\emptyset\}$, $P(P(a)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Objet d'apprentissage 3

Objectif principal de l'apprentissage	Opérations sur les ensembles
Nature de l'objet d'apprentissage	un sous-thème
Concepts clés	Mathématiques, théorie, ensemble, sous-ensemble, élément, partie, opération
Informations sur le module d'origine	Code : MAT 1104 FR Mathématiques discrètes Fana TANGARA
Accès au module d'origine	Cela doit être fourni par l'UVA
Extrait par:	Dr SAGBO Romaric
Date	08/05/2017

Les opérations sur les ensembles du numérique

- **Égalité de deux ensembles**

On dit que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments : $A \subset B$ et $B \subset A \Leftrightarrow A = B$.

- **Réunion, intersection**

Soient A et B deux ensembles, on considère la réunion de A et de B, $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui sont éléments de A ou de B.

Propriétés :

– idempotence : $A \cup A = A$

– commutativité : $A \cup B = B \cup A$

– associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

– élément neutre : $A \cup \emptyset = A$

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$ des éléments communs à A et à B.

Propriétés :

– idempotence : $A \cap A = A$

– commutativité : $A \cap B = B \cap A$

– associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

– élément neutre : si l'on se place dans un ensemble E et que A est une partie de E, alors E est élément neutre pour l'intersection : $A \cap E = A$

- **Complémentation**

Soit A un sous ensemble de E, on définit le complémentaire de A par rapport à E comme l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de A et on note : $E \setminus A$ (E moins A).

Propriétés :

– involution : $E \setminus (E \setminus A) = A$,

– loi de De Morgan : $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$, et

$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.

- **Produit cartésien**

Le produit cartésien des ensembles A et B (dans cet ordre) est l'ensemble des couples ordonnés (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$. On le note $A \times B$ (A croix B)

Objet d'apprentissage 4

Objectif principal de l'apprentissage	Quelques types de graphe
Nature de l'objet d'apprentissage	un résumé conçu
Concepts clés	Mathématique, graphe, ensemble
Informations sur le module d'origine	Code : MAT 1104 FR Mathématiques discrètes Fana TANGARA
Accès au module d'origine	Cela doit être fourni par l'UVA
Extrait par:	Dr SAGBO Romaric
Date	08/05/2017

Quelques types particuliers de graphes

Graphe planaire : Un graphe G est planaire s'il peut être établi dans le plan avec des arêtes qui ne se coupent qu'à leurs sommets.

Graphe simple : Un graphe est simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Multigraphes : On peut imaginer des graphes avec une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets. On appellera ces graphes des multigraphes.

Si un graphe a deux de ses sommets joints par plusieurs arêtes ou s'il admet une boucle, alors il est appelé multigraphe.

Graphes connexes : Un graphe est connexe s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes.

Graphes complets : Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré n-1.

Graphes biparti : Un graphe est biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y.

Objet d'apprentissage 5

Objectif principal de l'apprentissage	Graphe hamiltonien
Nature de l'objet d'apprentissage	un sous-thème
Concepts clés	Mathématique, graphe, ensemble, hamiltonien
Informations sur le module d'origine	Code : MAT 1104 FR Mathématiques discrètes Fana TANGARA
Accès au module d'origine	Cela doit être fourni par l'UVA
Extrait par:	Dr SAGBO Romaric
Date	08/05/2017

Graphe hamiltonien

Problème d'Hamilton : comment passer une, et une seule fois, par chacun des sommets du dodécaèdre, de telle manière que le dernier sommet visité est aussi le premier.

Ce problème est dû à William Rowan Hamilton, inventeur des quaternions.

Cycle hamiltonien. C'est un cycle qui passe par tous les sommets du graphe, une et une seule fois.

Graphe hamiltonien. Un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.

Propriétés. Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes hamiltoniens. On peut cependant énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

1. Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien.

2. Dans un graphe hamiltonien, si un sommet est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien.

3. Les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

4. Théorème de Ore : Soit G = (V, E) un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire {x,y} de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

5. Théorème de Bondy et Chvátal : Un graphe est hamiltonien si et seulement si sa fermeture est hamiltonienne.

6. Théorème de Dirac : Soit G = (V, E) un graphe simple d’ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.